TOME 13. N° 4. AVRIL 1952.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

COMPLÉMENTS A LA THÉORIE UNITAIRE DES CHAMPS

Par MARIE-ANTOINETTE TONNELAT.

Sommaire. — Cet article a pour but de compléter la « Théorie unitaire affine du champ physique » (*J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 81), tout particulièrement en ce qui concerne les points suivants : choix du tenseur de base $R_{\mu\nu}$; comptabilité des équations de la théorie; forme des équations électromagnétiques qu'on en peut déduire.

Dans un précédent travail (¹), nous avons exposé la résolution des équations $r_{\underset{+-}{\mu\nu};\rho}=0$ d'une théorie unitaire très générale. Nous voudrions ici compléter certains aspects de la théorie et insister particulièrement sur les points suivants :

1° La fonction d'action dépend d'un (ou de plusieurs) tenseurs du second rang. Nous discuterons les considérations qui peuvent intervenir dans le choix de ce tenseur et nous examinerons les conséquences de ce choix sur les équations des champs.

2° Les équations de la théorie ne sont pas, *a priori*, forcément compatibles. Nous chercherons à préciser si cette compatibilité peut être assurée suivant les tenseurs de base adoptés.

3° Les équations électromagnétiques déduites de la théorie peuvent différer d'équations strictement maxwelliennes. Nous discuterons les conditions d'assimilation du champ antisymétrique à un champ maxwellien.

Nous rappellerons les principes de la théorie, mais la résolution des équations $r_{\underset{+-}{\mu\nu};\rho}=0$ ne sera pas reprise ici. Nous en indiquerons seulement le résultat. Les notations restent, en général, celles de notre travail précédent. Toutefois, nous avons introduit quelques changements dans l'écriture afin de nous rapprocher, autant que possible, des notations d'Einstein et de Schrödinger. Nous signalerons ces modifications au fur et à mesure qu'elles se présenteront.

1. Le tenseur de courbure contracté.

— Une variété à connexion affine est définie par les 64 coefficients (²)

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}=\Gamma^{\rho}_{\underline{\mu\nu}}+\Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}, \qquad (1)$$

avec

$$\Gamma_{\mu}=\Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\rho}}. \qquad (2)$$

On sait que les deux formes de transport parallèle

$$d\xi^{\rho}_{+}=-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\xi^{\mu}\,dx^{\nu}, \qquad d\xi^{\rho}_{-}=-\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\xi^{\mu}\,dx^{\nu}$$

permettent de définir les deux tenseurs de courbure

$$R^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma}(\Gamma)=\partial_{\sigma}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}-\partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}+\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}, \qquad (3)$$

$$R^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma}(\tilde{\Gamma})=\partial_{\sigma}\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}-\partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu}+\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}-\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} \qquad (4)$$

en posant

$$\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}=\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}. \qquad (5)$$

A partir de chacun de ces tenseurs, on peut définir deux tenseurs contractés de première et de seconde espèce

$$R_{\mu\nu}(\Gamma)=R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}(\Gamma)=\partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}-\partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}+\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}, \qquad (6)$$

$$S_{\mu\nu}(\Gamma)=R^{\rho}{}_{\rho\mu\nu}(\Gamma)=\partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\rho\mu}-\partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\rho\nu}; \qquad (7)$$

$$P_{\mu\nu}(\Gamma)=R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}(\tilde{\Gamma}), \qquad (8)$$

$$Q_{\mu\nu}(\Gamma)=R^{\rho}{}_{\rho\mu\nu}(\tilde{\Gamma}). \qquad (9)$$

(¹) M. A. TONNELAT. *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 81.

(²) Nous adoptons ici les notations d'Einstein. Il convient donc de remplacer les $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$, $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, $\frac{1}{2}\Lambda^{\rho}_{\mu\nu}$ de notre précédent article par $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, $\Gamma^{\rho}_{\underline{\mu\nu}}$, $\Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$. D'autre part, le tenseur de torsion contracté Λ_{μ} s'écrit ici $2\Gamma_{\mu}$.

Une fonction d'action arbitraire peut dépendre théoriquement de ces quatre tenseurs auxquels on peut adjoindre le tenseur symétrique

$$I_{\mu\nu} = \Gamma_\mu \Gamma_\nu. \tag{10}$$

a. La première théorie unitaire affine générale ([3]) est, à notre connaissance, celle de M. Eyraud ([4]). Elle suppose une fonction d'action dépendant des tenseurs

$$K_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + R_{\nu\mu} \quad \text{et} \quad Q_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}(\tilde{\Gamma}).$$

La symétrisation de $R_{\mu\nu}$ permet d'aboutir à des équations $g_{\mu\nu;\rho} = 0$ qui définissent une connexion affine particulièrement simple. Malheureusement, cette symétrisation supprime le plus grand intérêt de la théorie : l'obtention des lois de l'électromagnétisme et de la gravitation à partir d'un seul tenseur généralisant de la façon la plus naturelle le tenseur $\mathring{G}_{\mu\nu}$ de la Relativité générale.

b. La généralisation la plus immédiate de la Relativité générale consiste à supposer que la fonction d'action dépend du seul tenseur de courbure contracté

$$R^{(0)}_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}(\Gamma) = \partial_\rho \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}. \tag{6}$$

C'est ce tenseur de base que choisit Schrödinger ([5]).

c. On est amené à faire intervenir au cours d'une théorie de ce genre l'une ou l'autre des connexions affines ([6])

$${}^{(1)}\Delta^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\left(\delta^{\rho}_{\mu}\Gamma_\nu - \delta^{\rho}_{\nu}\Gamma_\mu\right), \tag{11}$$

$${}^{(2)}\Delta^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\delta^{\rho}_{\mu}\Gamma_\nu, \tag{12}$$

qui jouissent toutes deux de l'importante propriété

$$\Delta_\mu = \Delta^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\rho}} = 0. \tag{13}$$

Il peut sembler naturel de penser que le tenseur $R_{\mu\nu}{}^{(1)}(\Delta)$ est le tenseur fondamental dont dépend la fonction d'action. On a

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{\mu\nu}(\Delta) = R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}({}^{(1)}\Delta) &= \partial_\rho {}^{(1)}\Delta^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_\nu {}^{(1)}\Delta^{\rho}_{\mu\rho} \\ &\quad + {}^{(1)}\Delta^{\lambda}_{\mu\nu}\,{}^{(1)}\Delta^{\rho}_{\lambda\rho} - {}^{(1)}\Delta^{\lambda}_{\mu\rho}\,{}^{(1)}\dot{\Delta}^{\rho}_{\lambda\nu} \\ &= \partial_\rho \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{3}(\partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu) - \partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\underline{\mu\rho}} \\ &\quad + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\underline{\lambda\rho}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \frac{1}{3}\Gamma_\mu\Gamma_\nu, \end{aligned} \tag{14}$$

et

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\nu}(\Delta) = R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}({}^{(2)}\Delta) &= \partial_\rho {}^{(2)}\Delta^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_\nu {}^{(2)}\Delta^{\rho}_{\mu\rho} \\ &\quad + {}^{(2)}\Delta^{\lambda}_{\mu\nu}\,{}^{(2)}\Delta^{\rho}_{\lambda\rho} - {}^{(2)}\Delta^{\lambda}_{\mu\rho}\,{}^{(2)}\Delta^{\rho}_{\lambda\nu} \\ &= R^{(0)}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}(\partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu) \end{aligned} \tag{15}$$

([3]) C'est-à-dire basée sur l'existence d'une variété admettant à la fois une torsion et les deux sortes de courbure.

([4]) Eyraud, *Thèse* (Blanchard, 1926).

([5]) *Cf.*, par exemple, Schrödinger. Studies in the non-sym. general of the theory of gravitation (*Comm. of the Dublin Institute*, Serv. A, n° 6, 1951).

([6]) Cette connexion était désignée par $\overset{*}{\Delta}$ dans notre précédent article.

d. Enfin, on peut essayer de réduire le nombre des tenseurs de base en adoptant, avec Einstein, un principe d'hermiticité ([7]). En supposant que la fonction d'action ne peut dépendre que des combinaisons linéaires hermitiennes des tenseurs de base, ou sera fondé à retenir les seuls tenseurs

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(\Gamma) &= \frac{1}{2}\left[R_{\mu\nu}(\Gamma) + R_{\nu\mu}(\tilde{\Gamma})\right] \\ &\quad - \frac{1}{4}\left[S_{\mu\nu}(\Gamma) + S_{\nu\mu}(\tilde{\Gamma})\right] \\ &= \partial_\rho\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\Gamma^{\rho}_{\underline{\nu\rho}} + \partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\underline{\mu\rho}}\right) \\ &\quad + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\underline{\lambda\rho}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}, \end{aligned} \tag{16}$$

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[S_{\mu\nu}(\Gamma) + S_{\nu\mu}(\tilde{\Gamma})\right] = \partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu, \tag{17}$$

$$I_{\mu\nu} = \Gamma_\mu\Gamma_\nu. \tag{10}$$

Il sera alors particulièrement avantageux de substituer au tenseur $U_{\mu\nu}(\Gamma)$ la combinaison linéaire

$$R^{(3)}_{\mu\nu} = U_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{1}{3}H_{\mu\nu} - \frac{1}{3}I_{\mu\nu}$$

qui n'est autre que le tenseur

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}({}^{(1)}\Delta) &= \frac{1}{2}\left[R_{\mu\nu}({}^{(1)}\Delta) + R_{\nu\mu}({}^{(1)}\tilde{\Delta})\right] \\ &= \partial_\rho {}^{(1)}\Delta^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu {}^{(1)}\Delta^{\rho}_{\underline{\nu\rho}} + \partial_\nu {}^{(1)}\Delta^{\rho}_{\underline{\mu\rho}}\right) \\ &\quad + {}^{(1)}\Delta^{\lambda}_{\mu\nu}\,{}^{(1)}\Delta^{\rho}_{\underline{\lambda\rho}} - {}^{(1)}\Delta^{\lambda}_{\mu\rho}\,{}^{(1)}\Delta^{\rho}_{\lambda\nu}. \end{aligned} \tag{18}$$

Finalement, nous sommes donc amenés à supposer que la fonction d'action dépend de l'un des trois tenseurs ([8])

$$\left.\begin{aligned} R^{(0)}_{\mu\nu}(\Gamma) &= R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}(\Gamma), \\ R^{(1)}_{\mu\nu}(\Delta) &= R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}({}^{(1)}\Delta), \\ R^{(2)}_{\mu\nu}(\Delta) &= R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}({}^{(2)}\Delta), \\ R^{(3)}_{\mu\nu}(\Delta) &= \frac{1}{2}\left[R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}({}^{(1)}\Delta) + R^{\rho}{}_{\nu\mu\rho}({}^{(1)}\tilde{\Delta})\right], \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

le dernier de ces tenseurs étant, seul, hermitien ([9]).

([7]) Une expression $A_{\mu\nu}(\Gamma)$ est dite hermitienne par rapport aux indices μ et ν si elle ne change pas quand on transforme simultanément μ en ν et Γ en $\tilde{\Gamma}$

$$A_{\mu\nu}(\Gamma) = A_{\nu\mu}(\tilde{\Gamma}).$$

Elle est antihermitienne si

$$A_{\mu\nu}(\Gamma) = -A_{\nu\mu}(\tilde{\Gamma}).$$

([8]) La fonction d'action peut dépendre, en outre, de $H_{\mu\nu}$ et de $I_{\mu\nu}$. Mais on constate que les équations résultant de la présence de ces tenseurs forment un système indépendant du type maxwellien [*cf. J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 83, éq. (32)]. Nous ne l'examinerons pas ici.

([9]) On constate facilement que les tenseurs $U_{\mu\nu}({}^{(1)}\Delta)$ et $R^{(1)}_{\mu\nu}(\Delta)$ sont tels que

$$U_{\mu\nu}({}^{(1)}\Delta) = R^{(1)}_{\mu\nu}(\Delta) - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\Gamma^{\rho}_{\underline{\nu\rho}} - \partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\underline{\mu\rho}}\right).$$

Ils ne se confondent pas l'un avec l'autre, car $\Gamma^{\rho}_{\underline{\mu\rho}}$ n'est pas ici un terme en gradient.

Nous désignerons l'un quelconque de ces tenseurs par $R_{\mu\nu}$ toutes les fois que nous n'aurons pas à préciser sa valeur en fonction de la connexion affine.

2. Le tenseur métrique $r_{\mu\nu}$. — La fonction d'action $\mathcal{A}$ dépend de $R_{\mu\nu}$ [8]. Définissons la densité tensorielle

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial R_{\mu\nu}}$$

dont les parties symétrique et antisymétrique en μ, ν sont $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ et $\mathcal{F}^{\mu\nu}$

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \mathcal{G}^{\mu\nu} + \mathcal{F}^{\mu\nu}.$$

Désignons par

$$\mathcal{F}^{\mu} = \partial_\rho \mathcal{F}^{\mu\rho} \tag{20}$$

le quadrivecteur courant. Il satisfait toujours les identités suivantes :

$$\frac{1}{2}\left(\mathcal{R}^{\underset{+-}{\mu\rho}}{}_{;\,\rho} - \mathcal{R}^{\underset{+-}{\rho\mu}}{}_{;\,\rho}\right) \equiv \mathcal{F}^{\mu} - \mathcal{G}^{\mu\rho}\Gamma_\rho \tag{21}$$

et

$$\frac{1}{2}\left(\mathcal{R}^{\underset{+-}{\mu\rho}}{}_{:\,\rho} - \mathcal{R}^{\underset{+-}{\rho\mu}}{}_{:\,\rho}\right) \equiv \mathcal{F}^{\mu}, \tag{22}$$

; et : désignant les dérivées covariantes rapportées aux connexions Γ et Δ.

Définissons un tenseur $r_{\mu\nu}$ dont les éléments forment le déterminant r. Soit $r r^{\mu\nu}$ le mineur relatif à chaque $r_{\mu\nu}$. Nous avons, par définition,

$$r_{\mu\sigma} r^{\mu\rho} = r_{\sigma\mu} r^{\rho\mu} = \delta^\rho_\sigma, \tag{23}$$

$$dr = r r^{\mu\nu}\, dr_{\mu\nu} = -r r_{\mu\nu}\, dr^{\mu\nu}. \tag{24}$$

Les $r^{\mu\nu}$ se déduisent des $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ en posant

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \omega r^{\mu\nu} \qquad (\omega = \sqrt{-r}).$$

Posons maintenant [10]

$$r^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}, \qquad r_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}, \tag{25}$$

avec

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \omega f^{\mu\nu}, \qquad \mathcal{G}^{\mu\nu} = \omega g^{\mu\nu}.$$

Si γ et φ sont les déterminants $|\gamma_{\mu\nu}|$ et $|\varphi_{\mu\nu}|$, $\gamma\gamma^{\mu\nu}$ et $\varphi\varphi^{\mu\nu}$ les mineurs relatifs aux éléments $\gamma_{\mu\nu}$ et $\varphi_{\mu\nu}$, on a les relations

$$\gamma_{\mu\sigma}\gamma^{\mu\rho} = \delta^\rho_\sigma, \qquad \varphi_{\mu\sigma}\varphi^{\mu\rho} = \delta^\rho_\sigma. \tag{26}$$

[10] Nous conservons ici les notations (25) au lieu des notations

$$g^{\mu\nu} = g^{\underline{\mu\nu}} + g^{\overset{\mu\nu}{\vee}} \qquad \text{et} \qquad g_{\mu\nu} = g_{\underline{\mu\nu}} + g_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$$

d'Einstein. L'emploi des symboles — et $\vee$ entraînerait, en effet, des confusions avec les notations surlignées que nous définissons par la suite et qui s'avèrent commodes pour la résolution des équations fondamentales. D'autre part, nous jugeons utile d'employer des lettres différentes dans la décomposition des $r^{\mu\nu}$ et des $r_{\mu\nu}$. Cela afin de pouvoir représenter par la même lettre un élément et son mineur et de conserver des relations de la forme (26) qui sont très simples à utiliser.

Le déterminant r s'exprime en fonction de γ et de φ par la relation

$$r = \gamma + \varphi + \frac{\gamma}{2}\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma} \tag{27}$$

dont on déduit

$$g^{\mu\nu} = \frac{\gamma}{r}\gamma^{\mu\nu} + \gamma^{\rho\sigma}\left(\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\tau\lambda} - \gamma^{\mu\tau}\gamma^{\nu\lambda}\right)\varphi_{\rho\tau}\varphi_{\sigma\lambda}, \tag{28}$$

$$f^{\mu\nu} = \frac{\varphi}{r}\varphi^{\mu\nu} + \frac{\gamma}{r}\gamma^{\mu\sigma}\gamma^{\nu\rho}\varphi_{\sigma\rho}. \tag{29}$$

Entre les composantes covariantes, on aura les relations analogues :

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\rho}\varphi_{\nu\sigma}\gamma^{\rho\sigma}, \tag{28'}$$

$$f_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\rho}\gamma_{\nu\sigma}\varphi^{\rho\sigma}. \tag{29'}$$

3. L'équation fondamentale $r_{\underset{+-}{\mu\nu};\rho} = 0$. — Les équations de la théorie se déduisent du principe variationnel

$$\delta \int \mathcal{A}\, d\tau = 0,$$

$\mathcal{A}$ dépendant des $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ par l'intermédiaire de $R_{\mu\nu}$. En considérant uniquement les variations des coefficients de connexion, les équations d'Euler sont équivalentes à certaines relations entre les densités, relations légèrement différentes suivant le choix de $R_{\mu\nu}$ [11].

1° Si $\mathcal{A}$ dépend de $R_{\mu\nu}(\Gamma) = \mathcal{R}^\rho_{\mu\nu\rho}(\Gamma)$, on obtient [12]

$$\mathcal{R}^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\,\rho} = -\frac{2}{3}\mathcal{R}^{\mu\lambda}\Gamma_\lambda\,\delta^\nu_\rho + \mathcal{R}^{\mu\nu}\Gamma_\rho. \tag{30}$$

Le changement de variables (12) permet d'écrire

$$\mathcal{R}^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\,\rho} = 0, \tag{31}$$

$;\rho$ désignant la dérivée covariante par rapport à une connexion Δ' qui, par définition, permet une relation de la forme (31) sans second membre. [Ici Δ', défini par (12), se confond avec ${}^{(2)}\Delta$.]

2° Si $\mathcal{A}$ dépend de $R_{\mu\nu}(\Delta) = R^\rho_{\mu\nu\rho}(\Delta)$, Δ désignant ${}^{(1)}\Delta$ ou ${}^{(2)}\Delta$, on a [13]

$$\mathcal{R}^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{:\,\rho} = \mathcal{R}^{\underset{+-}{\nu\sigma}}{}_{:\,\sigma}\,\delta^\mu_\rho. \tag{32}$$

[11] S'il s'agit de $R_{\mu\nu}(\Delta)$ ou de $U_{\mu\nu}(\Delta)$, il faut noter que les 64 coefficients Δ ne sont pas tous indépendants ($\Delta^\rho_{\underset{\vee}{\mu\rho}} = 0$) et en tenir compte dans l'application du principe variationnel. On peut exprimer $R_{\mu\nu}(\Delta)$ et $U_{\mu\nu}(\Delta)$ en fonction des Γ [form. (14), (15) et (18)] et considérer les variations $\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}$.

[12] Rappelons que ; désigne la dérivation rapportée aux coefficients Γ. Suivant les notations d'Einstein :

$$\mathcal{R}^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\,\rho} = \partial_\rho \mathcal{R}^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\mathcal{R}^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\sigma}\mathcal{R}^{\mu\sigma} - \mathcal{R}^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\underline{\rho\sigma}}.$$

[13] Rappelons que : désigne la dérivation rapportée aux coefficients Δ. D'où

$$\mathcal{R}^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{:\,\rho} = \partial_\rho \mathcal{R}^{\mu\nu} + \Delta^\mu_{\sigma\rho}\mathcal{R}^{\sigma\nu} + \Delta_{\rho\sigma}\mathcal{R}^{\mu\sigma} - \mathcal{R}^{\mu\nu}\Delta^\sigma_{\rho\sigma}.$$

Ces coefficients représentent ${}^{(1)}\Delta$ ou ${}^{(2)}\Delta$ suivant qu'il s'agit de $R^{(1)}_{\mu\nu}$ ou de $R^{(2)}_{\mu\nu}$.

a. On peut montrer que le second membre de cette équation ne dépend que de $\mathcal{F}^{\nu}=\partial_{\sigma}\mathcal{F}^{\nu\sigma}$. En effet, (32) entraîne par contraction

$$4\mathcal{R}^{\overset{\nu\rho}{+-}}{}_{:\rho}=\mathcal{R}^{\overset{\rho\nu}{+-}}{}_{:\rho}. \tag{33}$$

D'après (22), on a donc

$$\mathcal{F}^{\nu}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{R}^{\overset{\nu\rho}{+-}}{}_{:\rho}-\mathcal{R}^{\overset{\rho\nu}{+-}}{}_{:\rho}\right)=-\frac{3}{2}\mathcal{R}^{\overset{\nu\rho}{+-}}{}_{:\rho}, \tag{34}$$

d'où, en substituant dans (32),

$$\mathcal{R}^{\overset{\mu\nu}{+-}}{}_{:\rho}=-\frac{2}{3}\mathcal{F}^{\nu}\delta^{\mu}_{\rho}. \tag{35}$$

b. D'autre part, on peut obtenir une équation sans second membre en faisant le changement de variable

$$\Delta'^{\rho}_{\mu\nu}=\Delta^{\rho}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}r_{\mu\nu}(f^{\rho}+f^{\bar{\rho}})$$
$$-\frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\mu}r_{\nu\lambda}(f^{\lambda}-f^{\bar{\lambda}})+\frac{1}{6}\delta^{\rho}_{\nu}r_{\mu\lambda}f^{\lambda}-\frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\nu}r_{\mu\lambda}f^{\bar{\lambda}} \tag{36}$$

en posant

$$\mathcal{F}^{\rho}=\omega f^{\rho}, \tag{37}$$
$$f^{\bar{\rho}}=\gamma^{\rho\lambda}\varphi_{\lambda\sigma}f^{\sigma} \tag{38}$$

et, d'une façon générale, en utilisant les notations soulignées introduites dans nos précédents travaux [*cf*. note (14)]

On obtient alors en substituant (36) dans (35)

$$\mathcal{R}^{\overset{\mu\nu}{+-}}{}_{;\rho}=0, \tag{39}$$

$;\rho$ désignant la dérivation covariante rapportée à la connexion Δ' définie par (36).

3° Si $\mathcal{A}$ dépend de

$$\mathcal{R}^{(3)}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left[\mathcal{R}^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}({}^{(1)}\Delta)+\mathcal{R}^{\rho}{}_{\nu\mu\rho}({}^{(1)}\tilde{\Delta})\right],$$

on obtient

$$\mathcal{R}^{\overset{\mu\nu}{+-}}{}_{:\rho}=-\frac{1}{3}\left(\delta^{\mu}_{\rho}\mathcal{R}^{\overset{\nu\sigma}{+-}}{}_{:\sigma}-\delta^{\nu}_{\rho}\mathcal{R}^{\overset{\mu\sigma}{+-}}{}_{:\sigma}\right). \tag{40}$$

a. Le second membre de cette équation ne dépend que de $\mathcal{F}^{\mu}$. En effet, en contractant en ρ et μ, on obtient la condition

$$\mathcal{R}^{\overset{\nu\rho}{+-}}{}_{:\rho}+\mathcal{R}^{\overset{\rho\nu}{+-}}{}_{:\rho}=0, \tag{41}$$

d'où

$$\mathcal{F}^{\nu}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{R}^{\overset{\nu\rho}{+-}}{}_{:\rho}-\mathcal{R}^{\overset{\rho\nu}{+-}}{}_{:\rho}\right)=\mathcal{R}^{\overset{\nu\rho}{+-}}{}_{:\rho}. \tag{42}$$

En substituant dans (40)

$$\mathcal{R}^{\overset{\mu\nu}{+-}}{}_{:\rho}=-\frac{1}{3}\left(\delta^{\mu}_{\rho}\mathcal{F}^{\nu}-\delta^{\nu}_{\rho}\mathcal{F}^{\mu}\right). \tag{43}$$

b. En utilisant la connexion définie par les coefficients

$$\Delta'^{\rho}_{\mu\nu}={}^{(1)}\Delta^{\rho}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}r_{\mu\nu}f^{\bar{\rho}}+\frac{1}{6}\left(\delta^{\rho}_{\mu}r_{\lambda\nu}-\delta^{\rho}_{\nu}r_{\mu\lambda}\right)f^{\lambda}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\delta^{\rho}_{\mu}r_{\nu\lambda}-\delta^{\rho}_{\nu}r_{\mu\lambda}\right)(f^{\lambda}-f^{\bar{\lambda}}), \tag{44}$$

on obtient l'équation sans second membre

$$\mathcal{R}^{\overset{\mu\nu}{+-}}{}_{;\rho}=0, \tag{45}$$

le symbole ; désignant toujours, par définition, la dérivation covariante rapportée aux coefficients Δ' qui permettent d'obtenir une équation du type (45). Ces coefficients sont ici définis par (44).

4. Compatibilité des équations de la théorie. — Les équations $\mathcal{R}^{\mu\nu}{}_{;\rho}=0$ forment un système de 64 équations à 64 inconnues dont la résolution ne présente que des difficultés techniques. On peut donc déterminer tous les $\Delta'^{\rho}_{\mu\nu}$ en fonction des $r_{\mu\nu}$.

Une difficulté semble alors résider dans le fait suivant : Les 64 $\Delta'^{\rho}_{\mu\nu}$ ne sont pas indépendants. Par définition, ils doivent vérifier quatre relations qui résultent de la condition

$$\underset{\vee}{\Delta^{\rho}_{\mu\rho}}\equiv 0. \tag{12}$$

En effet, en tenant compte des définitions (30), (36) ou (44), la condition (12) entraîne

$$\underset{\vee}{\Delta'^{\rho}_{\mu\rho}}=0 \tag{46}$$

s'il s'agit du choix $R_{\mu\nu}(\Gamma)$;

$$\underset{\vee}{\Delta'^{\rho}_{\mu\rho}}=r_{\mu\rho}(f^{\rho}-f^{\bar{\rho}})=f_{\mu}-f_{\bar{\bar{\mu}}}\quad(^{14}) \tag{47}$$

s'il s'agit du choix $R^{(1)}_{\mu\nu}$, $R^{(2)}_{\mu\nu}$ ou $R^{(3)}_{\mu\nu}$ (15).

On peut donc se demander si ces quatre conditions sont compatibles avec les 64 équations (45).

Pour comparer les solutions $\underset{\vee}{\Delta'^{\rho}_{\mu\rho}}$ tirées de (45) avec les valeurs (46) ou (47), il n'est pas nécessaire de résoudre (45). On a, en effet, par définition

$$\frac{1}{2}\left(\mathcal{R}^{\overset{\nu\rho}{+-}}{}_{;\rho}-\mathcal{R}^{\overset{\rho\nu}{+-}}{}_{;\rho}\right)=\mathcal{F}^{\nu}-\underset{\vee}{\Delta'^{\rho}_{\lambda\rho}}\mathcal{G}^{\lambda\nu}. \tag{48}$$

Si (45) est satisfaite, $\underset{\vee}{\Delta'^{\rho}_{\lambda\rho}}$ doit vérifier

$$\mathcal{F}^{\nu}-\underset{\vee}{\Delta'^{\rho}_{\lambda\rho}}\mathcal{G}^{\lambda\nu}=0, \tag{49}$$

c'est-à-dire :

$$\underset{\vee}{\Delta'^{\rho}_{\mu\rho}}=g_{\mu\nu}f^{\nu}. \tag{50}$$

(14) Rappelons les notations :

$$f_{\mu}=\gamma_{\mu\rho}f^{\rho},\qquad f_{\bar{\mu}}=\varphi_{\mu\rho}f^{\rho}=\varphi_{\mu\rho}\gamma^{\rho\lambda}f_{\lambda},$$
$$f_{\bar{\bar{\mu}}}=\varphi_{\mu\rho}\gamma^{\rho\sigma}\varphi_{\sigma\nu}\gamma^{\nu\lambda}f_{\lambda},\qquad\ldots;$$
$$f^{\mu}=\gamma^{\mu\rho}f_{\rho},\qquad f^{\bar{\mu}}=\gamma^{\mu\rho}f_{\bar{\rho}}=\gamma^{\mu\rho}\varphi_{\rho\lambda}f^{\lambda},$$
$$f^{\bar{\bar{\mu}}}=\gamma^{\mu\rho}\varphi_{\rho\sigma}\gamma^{\sigma\nu}\varphi_{\nu\lambda}f^{\lambda},\qquad\ldots.$$

(15) Notons que les changements de variables (36) et (44) conduisent à une même valeur de $\underset{\vee}{\Delta'^{\rho}_{\mu\rho}}$, ce qui est nécessaire si cette valeur est solution de (45).

Aussi, d'après l'expression (28′) de $g_{\mu\nu}$, $\underset{\vee}{\Delta}{}'^{\rho}_{\mu\rho}$ s'écrit encore

$$\underset{\vee}{\Delta}{}'^{\rho}_{\mu\rho} = (\gamma_{\mu\nu} - \varphi_{\mu\rho}\gamma^{\rho\sigma}\varphi_{\sigma\nu})f^{\nu} = f_{\mu} - f_{\overline{\overline{\mu}}}. \qquad (51)$$

L'équation (45) est donc compatible avec cette valeur qui en est solution et avec cette valeur seulement. Or, c'est elle précisément qu'entraînent les conditions $\underset{\vee}{\Delta}{}^{\rho}_{\mu\rho} = 0$ si l'on choisit les tenseurs de base $R_{\mu\nu}(\Delta)$ ou $U_{\mu\nu}(\Delta)$. Dans ce cas, la solution des équations $\mathcal{R}^{\mu\nu}_{+-};\rho = 0$ est donc toujours compatible avec les conditions $\underset{\vee}{\Delta}{}^{\rho}_{\mu\rho} = 0$ (ou $\underset{\vee}{\Delta}{}'^{\rho}_{\mu\rho} = f_{\mu} - f_{\overline{\overline{\mu}}}$). Cette conclusion est d'ailleurs évidente, d'après la forme même des équations (32) ou (40) qui correspondent au choix $R_{\mu\nu}(\Delta)$ ou $U_{\mu\nu}(\Delta)$. En effet, (32) et (40) se réduisent l'une et l'autre à quatre identités pour $\rho = \nu$. Elles sont donc forcément compatibles avec les quatre conditions supplémentaires $\underset{\vee}{\Delta}{}^{\rho}_{\mu\rho} = 0$.

Il n'en va pas de même avec le choix $R_{\mu\nu}(\Gamma)$: la condition $\underset{\vee}{\Delta}{}'^{\rho}_{\mu\rho} = 0$ ne se réduit à (50) que si

$$\mathcal{F}^{\mu} = 0. \qquad (52)$$

Dans ce cas, mais dans ce cas seulement, $\underset{\vee}{\Delta}{}'^{\rho}_{\mu\nu}$ défini par (30) est solution de (45). Le choix $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ nécessite donc *a priori* l'hypothèse supplémentaire d'un courant nul, ce qui restreint arbitrairement les possibilités de la théorie.

5. **Solution rigoureuse de l'équation $\mathcal{R}^{\mu\nu}_{+-};\rho = 0$.** — Nous ne reprendrons pas ici la résolution de l'équation $\mathcal{R}^{\mu\nu}_{+-};\rho = 0$. Elle a été indiquée dans le travail précédent ([16]). Le résultat en est le suivant :

La partie antisymétrique de la connexion affine

$$V_{\mu\nu,\rho} = \gamma_{\rho\sigma}\underset{\vee}{\Delta}{}'^{\sigma}_{\mu\nu}$$

est déterminée en fonction des $r_{\mu\nu}$ de la façon suivante :

$$(a^2 - b^2)V_{\mu\nu,\rho} = aS_{\mu\nu,\rho} + bS^{\star}_{\mu\nu,\rho}, \qquad (53)$$

avec

$$S_{\mu\nu,\rho} = \left(2 - \frac{r}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right)R_{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}R^{\star}_{\mu\nu,\rho} - R_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}} \quad ([17]) \qquad (54)$$

en posant

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu,\rho} = {} & + \mathring{D}_{\rho}\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu\rho} - \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}}\varphi^{\star}_{(\mu\nu)\rho} \\ & - \varphi_{\mu\nu}\,\partial_{\rho}\,\mathrm{Log}\,\frac{r}{\gamma} - \frac{\varphi}{2\sqrt{-\gamma}}\varepsilon^{\star}_{(\mu\nu)\rho\lambda}\varphi^{\sigma\lambda}\,\partial_{\sigma}\,\mathrm{Log}\,\frac{r}{\varphi} \\ & + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}}\varphi^{\star}_{\mu\nu}\,\partial_{\rho}\,\mathrm{Log}\,\frac{r}{\varphi} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}}\varphi^{\star}_{\mu\nu}\varphi^{ab}\varphi_{ab\rho} \\ & + \frac{\sqrt{\varphi}}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\varphi^{\sigma\lambda}\,\partial_{\sigma}\,\mathrm{Log}\,\frac{r}{\gamma} \\ & + \gamma^{\alpha\lambda}\left[\sqrt{\varphi}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha}\Delta'_{\lambda} + \varphi_{\rho\lambda}(\varphi_{\alpha\nu}\Delta'_{\mu} + \varphi_{\mu\alpha}\Delta'_{\nu} + \varphi_{\nu\mu}\Delta'_{\alpha})\right] \end{aligned} \qquad (55)$$

et

$$\left.\begin{aligned} & a = 2 - \frac{r}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma}, \qquad b = \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}\left(3 - \frac{r}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right), \\ & \Delta'_{\mu} = \underset{\vee}{\Delta}{}'^{\rho}_{\mu\rho} = f_{\mu} - f_{\overline{\overline{\mu}}}, \qquad \varphi_{\mu\nu\rho} = \partial_{\mu}\varphi_{\nu\rho} + \partial_{\rho}\varphi_{\mu\nu} + \partial_{\nu}\varphi_{\rho\mu}. \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

La partie symétrique de la connexion affine s'obtient elle-même à partir des $V_{\nu\mu,\rho}$. On a

$$\underline{\Delta}{}'^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + u^{\rho}_{\mu\nu}, \qquad (57)$$

avec

$$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}\gamma_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}\gamma_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}\gamma_{\mu\nu}), \qquad (58)$$

$$u^{\rho}_{\mu\nu} = -\gamma^{\rho\sigma}(V_{\mu\rho,\overline{\nu}} + V_{\nu\rho,\overline{\mu}}). \qquad (59)$$

La connexion affine $\Delta'^{\rho}_{\mu\nu} = \underline{\Delta}{}'^{\rho}_{\mu\nu} + \underset{\vee}{\Delta}{}'^{\rho}_{\mu\nu}$ est donc entièrement déterminée par (53), (55), (57) et (59). La connexion $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ s'exprime elle-même immédiatement en fonction de $\Delta'^{\rho}_{\mu\rho}$ par les changements de variable (12), ou (11)-(36), ou (11)-(44)

6. **Équations rigoureuses des champs.** — Les équations rigoureuses des champs s'obtiennent aussi par un principe variationnel $\delta\int \mathcal{A}\,d\tau = 0$. Jusqu'à présent, nous avons considéré les seules variations $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, les coefficients de connexion étant considérés comme les seules variables indépendantes. Ainsi sommes-nous arrivés aux équations $\mathcal{R}^{\mu\nu}_{+-};\rho = 0$.

Pour aller plus loin et obtenir les équations des champs, nous devons :

Soit regarder les $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ comme d'autres variables indépendantes et tenir compte des variations $\delta\mathcal{R}^{\mu\nu}$;

Soit, pour rester fidèles aux principes de la géométrie affine, considérer les $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ comme des fonctions des $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$ définis par $\mathcal{R}^{\mu\nu} = \dfrac{\partial\mathcal{A}}{\partial R_{\mu\nu}}$. Pour obtenir les équations des champs, il est alors nécessaire d'attri-

([16]) M. A. Tonnelat. *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 84, § 3. Notons que la compatibilité des équations étant toujours réalisée, il ne faut tenir aucun compte des équations (69) et (70) de cet article. La solution générale est donnée par ($\mathcal{E}$) et (68). A partir de ($\mathcal{E}$), on obtient par contraction une identité [au lieu de (69)] pour la valeur (36)

$$\Delta'_{\mu} = 2\underset{\vee}{\Delta}{}'^{\rho}_{\mu\rho} = 2(f_{\mu} - f_{\overline{\overline{\mu}}}).$$

([17]) Rappelons les notations

$$R_{\mu\nu,\overline{\rho}} = \varphi_{\rho\lambda}\gamma^{\lambda\sigma}R_{\mu\nu,\sigma}, \qquad R_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}} = \varphi_{\rho\lambda}\gamma^{\lambda\sigma}R_{\mu\nu,\overline{\sigma}}, \qquad \ldots,$$

$$R^{\star}_{\mu\nu,\rho} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\alpha\lambda}\gamma^{\beta\sigma}R_{\lambda\sigma,\rho}.$$

Les expressions $\Phi^{\star}_{(\mu\nu)\rho}$, $\varphi^{\star}_{\mu\nu}$, $\varepsilon^{\star}_{(\mu\nu)\rho\sigma}$ sont définies d'une manière analogue.

buer à la fonction $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{R}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ une forme particulière. Nous poserons

$$\mathcal{A} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{-R}, \qquad R = \det R_{\mu\nu}. \qquad (60)$$

Par un procédé classique, on obtient alors les équations

$$R_{\mu\nu} = \lambda\, r_{\mu\nu}. \qquad (61)$$

Nous savons que $R_{\mu\nu}$ représente $R_{\underline{\mu}\overline{\nu}}(\Gamma)$, $R_{\mu\nu}(\Delta)$ ou $U_{\mu\nu}(\Delta)$, chacun de ces tenseurs ayant l'expression (6), (14), (15) ou (16). Reprenant les notations (19), nous les désignerons par $R^{(a)}_{\mu\nu}$ ($a = 0, 1, 2, 3$). Nous devons d'abord exprimer chacun d'eux en fonction de la connexion Δ' telle que $\mathcal{R}^{\mu\nu}_{+-;\rho} = 0$, c'est-à-dire réaliser dans les expressions précédentes le changement de variable défini par (12), (36) ou (44). Il est commode de mettre en évidence la partie non riemannienne $\Delta''^{\rho}_{\mu\nu}$ des coefficients Δ'. On posera donc

$$\Delta'^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + \Delta''^{\rho}_{\mu\nu}, \qquad \text{avec} \quad \Delta''^{\rho}_{\mu\nu} = u^{\rho}_{\mu\nu} + \Delta'^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}, \qquad (62)$$

$\{\ \}$ étant les symboles de Christoffel (58) formés à partir des $\gamma_{\mu\nu}$. Après calculs, on trouve que $R^{(a)}_{\mu\nu}$ peut toujours s'écrire de la manière suivante :

$$R^{(a)}_{\mu\nu} = \mathring{G}_{\mu\nu} + \mathring{D}_{\rho}\Delta''^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathring{D}_{\mu}\mathring{D}_{\nu}\operatorname{Log} r + \Delta''^{\rho}_{\mu\nu}u_{\rho} - \Delta''^{\lambda}_{\mu\rho}\Delta''^{\rho}_{\lambda\nu} + K^{(a)}_{\mu\nu}, \qquad (63)$$

en désignant par $\mathring{G}_{\mu\nu}$ et par $\mathring{D}_{\rho}$ le tenseur de courbure contracté (écrit avec les $\{\ \}$) et les dérivées covariantes utilisées dans un espace de Riemann.

$K^{(a)}_{\mu\nu}$ dépend du tenseur $R^{(a)}_{\mu\nu}$ adopté. Il prend les valeurs $K^{(0)}_{\mu\nu}$, $K^{(1)}_{\mu\nu}$, $K^{(2)}_{\mu\nu}$ ou $K^{(3)}_{\mu\nu}$ suivant le choix $R^{(0)}_{\mu\nu}$, $R^{(1)}_{\mu\nu}$, $R^{(2)}_{\mu\nu}$ ou $R^{(3)}_{\mu\nu}$. On a ainsi

$$K^{(0)}_{\mu\nu} = -\frac{2}{3}(\partial_{\mu}\Gamma_{\nu} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu}), \qquad (64)$$

$$K^{(1)}_{\mu\nu} = K^{(2)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\omega} r_{\mu\nu}\partial_{\rho}\mathcal{F}^{\bar{\rho}} + \frac{1}{2}\left[\partial_{\mu}(f_{\nu} - f_{\bar{\nu}}) - \partial_{\nu}(f_{\mu} - f_{\bar{\mu}})\right] - \frac{1}{2}(f_{\mu} - f_{\bar{\mu}})(f_{\nu} - f_{\bar{\nu}}), \qquad (65)$$

$$K^{(3)}_{\mu\nu} = K^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{6}(\partial_{\mu}f_{\nu} - \partial_{\nu}f_{\mu}) + \frac{1}{6}(f_{\mu} + f_{\bar{\mu}})(f_{\nu} - f_{\bar{\nu}}). \qquad (66)$$

Les équations rigoureuses des champs sont alors données par

$$R^{(a)}_{\mu\nu} = \lambda\, r_{\mu\nu} \qquad (67)$$

dans lesquelles $R^{(a)}_{\mu\nu}$ a la valeur (63). En scindant cette équation en parties symétrique et antisymétrique, on obtient

$$\mathring{G}_{\mu\nu} + \mathring{D}_{\rho}u^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathring{D}_{\mu}\mathring{D}_{\nu}\operatorname{Log} r + u^{\rho}_{\mu\nu}u_{\rho} - u^{\lambda}_{\mu\rho}u^{\rho}_{\lambda\nu} - \Delta'^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\rho}}\Delta'^{\rho}_{\underset{\vee}{\lambda\nu}} + K^{(a)}_{\underline{\mu\nu}} = \lambda\gamma_{\mu\nu}, \qquad (68)$$

$$\mathring{D}_{\rho}\Delta'^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} + \Delta'^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}u_{\rho} + \left(u^{\lambda}_{\mu\rho}\Delta'^{\rho}_{\underset{\vee}{\lambda\nu}} + u^{\rho}_{\lambda\nu}\Delta'^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\rho}}\right) + K^{(a)}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = \lambda\varphi_{\mu\nu}. \qquad (69)$$

Ce sont les équations rigoureuses de l'électromagnétisme et de la gravitation dans lesquelles les $\Delta'^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ et $u^{\rho}_{\mu\nu}$ doivent être remplacés par les valeurs déterminées au paragraphe précédent [équations (53) et (59)].

7. Les équations approchées de l'électromagnétisme et de la gravitation. — Nous ne ferons aucune restriction sur la forme et l'ordre de grandeur de la partie symétrique $\gamma_{\mu\nu}$ du tenseur $r_{\mu\nu}$. Par contre, nous supposerons que le champ antisymétrique $\varphi_{\mu\nu}$ est petit ($\sim \varepsilon$) ainsi que ses dérivées et nous conviendrons de négliger les termes en ε^{3} devant l'unité.

Dans ce cas, la solution générale de $\mathcal{R}^{\mu\nu}_{+-;\rho} = 0$ se réduit à

$$\Delta'_{\underset{\vee}{\mu\nu},\rho} = \mathring{D}_{\rho}\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu\rho} \qquad (70)$$

et les équations (68) et (69) s'écrivent simplement

$$\mathring{G}_{\mu\nu} + \mathring{D}_{\rho}u^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathring{D}_{\mu}\mathring{D}_{\nu}\operatorname{Log} r - \Delta'^{\lambda}_{\mu\rho}\Delta'^{\rho}_{\lambda\nu} + K^{(a)}_{\underline{\mu\nu}} = \lambda\gamma_{\mu\nu}, \qquad (71)$$

$$\mathring{D}_{\rho}\Delta'^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} + K^{(a)}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = \lambda\varphi_{\mu\nu}, \qquad (72)$$

avec

$$K^{(a)}_{\underline{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\mathring{D}_{\rho}f^{\bar{\rho}} - m^{(a)}f_{\mu}f_{\nu}, \qquad (73)$$

$$K^{(a)}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = -\frac{2}{3}\delta^{0a}(\partial_{\mu}\Gamma_{\nu} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu}) + m^{(a)}(\partial_{\mu}f_{\nu} - \partial_{\nu}f_{\mu}), \qquad (74)$$

avec $f_{\mu} = 0$, $\delta^{0a} = 1$ dans le cas (0); $f_{\mu} \neq 0$, $\delta^{0a} = 0$ dans les autres cas.

$$m^{(1)} = \frac{1}{2}, \qquad m^{(3)} = \frac{1}{3}.$$

a. Électromagnétisme. — Considérons d'abord (72) qui représente les équations électromagnétiques. En comparant (70) et (72), ces équations s'écrivent encore

$$\mathring{\Box}\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathring{D}^{\rho}\varphi_{\mu\nu\rho} + K^{(a)}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = \lambda\varphi_{\mu\nu}. \qquad (75)$$

Or, on calcule facilement, dans un espace de Riemann, l'expression $\mathring{D}^{\rho}\varphi_{\mu\nu\rho}$ à partir des définitions

$$\varphi_{\mu\nu\rho} = \partial_{\mu}\varphi_{\nu\rho} + \partial_{\rho}\varphi_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\varphi_{\rho\mu} \qquad \text{et} \qquad \mathring{D}^{\rho}\varphi_{\mu\rho} \simeq f_{\mu}. \qquad (76)$$

En se servant des identités

$$\left.\begin{array}{l} (\mathring{D}_{\rho}\mathring{D}_{\sigma} - \mathring{D}_{\sigma}\mathring{D}_{\rho})\varphi_{\mu\nu} = \mathring{G}^{\lambda}{}_{\mu\rho\sigma}\varphi_{\lambda\nu} + \mathring{G}^{\lambda}{}_{\nu\rho\sigma}\varphi_{\mu\lambda}, \\ \mathring{G}^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma} + \mathring{G}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} + \mathring{G}^{\rho}{}_{\nu\sigma\mu} = 0, \end{array}\right\} \qquad (77)$$

valables dans un espace de Riémann, et aussi de la relation

$$\mathring{G}_{\mu\nu} \simeq \lambda \gamma_{\mu\nu} \tag{78}$$

équivalente à (71) au deuxième ordre près, on obtient

$$\mathring{D}^{\rho}\varphi_{\bar{\mu}\bar{\nu}\rho} = \mathring{\Box}\varphi_{\mu\nu} + (\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) - 2\lambda\varphi_{\mu\nu} - \mathring{G}_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}. \tag{79}$$

En substituant dans (75), on en déduit

$$\mathring{\Box}\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu - 2K^{(a)}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} - G_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}. \tag{80}$$

Telles sont les équations approchées du champ électromagnétique.

b. Gravitation. — On peut facilement calculer, à l'approximation admise, toutes les quantités qui figurent dans l'expression de $G_{\mu\nu}$, c'est-à-dire dans le premier membre de (71). On connaît, en effet, la valeur (70) de $\Delta'^{\rho}_{\mu\nu}$ et l'on sait que

$$u^{\rho}_{\mu\nu} = -\gamma^{\rho\lambda}\left(\Delta'_{\underset{\vee}{\mu\lambda},\bar{\nu}} + \Delta'_{\underset{\vee}{\nu\lambda},\bar{\mu}}\right). \tag{59}$$

D'autre part, d'après (27),

$$\mathring{D}_\mu \mathring{D}_\nu \operatorname{Log} r \simeq D_\mu D_\nu F, \quad \text{avec} \quad F = \frac{1}{2}\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma}. \tag{81}$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}\mathring{G}_{\mu\nu} = \lambda\gamma_{\mu\nu} &- \frac{1}{4}\varphi'_{\mu\rho\sigma}\varphi'^{\rho\sigma}_{\nu} \\ &- \frac{1}{2}\left(\varphi'_{\rho\mu\sigma}\mathring{D}_\nu\varphi'^{\rho\sigma} + \varphi'_{\rho\nu\sigma}\mathring{D}_\mu\varphi'^{\rho\sigma}\right) \\ &- \frac{1}{2}\mathring{\Box}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varphi'^{\rho\sigma}\mathring{D}_\mu\mathring{D}_\nu\varphi'_{\rho\sigma} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\mathring{D}_{\bar{\mu}}f_\nu + \mathring{D}_{\bar{\nu}}f_\mu\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\varphi'_{\mu\sigma}D_\nu f^\sigma + \varphi'_{\nu\sigma}D_\mu f^\sigma\right) - K^{(0)}_{\underline{\mu\nu}}\end{aligned} \tag{82}$$

en désignant par des lettres accentuées les composantes du champ dont les indices sont élevés et abaissés par les $\gamma_{\mu\nu}$

$$\varphi'_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}, \qquad \varphi'^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\rho\sigma}$$

et en posant

$$F_{\mu\nu} = \varphi'^{\rho}_{\mu}\varphi'_{\rho\nu}, \qquad F = \frac{1}{2}\varphi'_{\mu\nu}\varphi'^{\mu\nu}.$$

8. **Cas maxwellien : la condition** $\varphi_{\mu\nu\rho} = 0$. — Dans une théorie unitaire générale, la condition $\varphi_{\mu\nu\rho} = 0$ ne résulte pas des équations de la théorie. On est amené à lui substituer l'équation de propagation (80) ([18]).

([18]) L'adjonction d'une torsion avait déjà conduit Infeld à remplacer la condition maxwellienne $\varphi_{\mu\nu\rho} = 0$ par l'équation de propagation

$$(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) + \mathring{\Box}\varphi_{\mu\nu} = 0.$$

Cf. L. Infeld, *Z. Physik*, 1928, **50**, 137.

D'autre part, dans un espace de Riemann, la définition de $\varphi_{\mu\nu\rho}$ et de f_μ entraîne, en dehors de toute autre considération, l'équation (79). Si $\varphi_{\mu\nu\rho} = 0$, l'équation de propagation d'un champ maxwellien a donc nécessairement la forme suivante :

$$\mathring{\Box}\varphi_{\mu\nu} = -(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) + 2\lambda\varphi_{\mu\nu} + \mathring{G}_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}. \tag{80'}$$

Cette équation ne peut coïncider avec l'équation de propagation (80) déduite de la théorie unitaire des champs que si la condition

$$(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) - K^{(a)}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} - \lambda\varphi_{\mu\nu} - \mathring{G}_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma} = 0 \tag{83}$$

est satisfaite.

Cette condition (83) n'est pas nécessairement réalisée et, par conséquent, la condition maxwellienne $\varphi_{\mu\nu\rho} = 0$ n'est pas, en général, satisfaite. En particulier, elle ne peut avoir lieu [la condition (83) n'étant pas réalisée] :

1° Si, avec le choix $R^{(0)}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(\Gamma)$ pour lequel $f_\mu = 0$, on suppose, en outre, $\Gamma_\mu = 0$;

2° Si, dans les autres cas, on suppose $f_\mu = 0$.

En effet, dans l'une ou l'autre hypothèse, la condition $\varphi_{\mu\nu\rho} = 0$ exigerait, d'après (83),

$$G_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma} = -\lambda\varphi_{\mu\nu}. \tag{84}$$

Or, cette condition n'a aucune raison d'être. On peut vérifier, au contraire, qu'elle n'est pas réalisée pour des solutions statiques à symétrie sphérique. En particulier, on le constate facilement si le tenseur $\mathring{G}^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma}$, correspondant à un univers de de Sitter à courbure constante, peut s'écrire à l'approximation du 1er ordre :

$$\mathring{G}^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\lambda}{3}\left(\gamma_{\mu\nu}\delta^{\rho}_{\sigma} - \gamma_{\mu\sigma}\delta^{\rho}_{\nu}\right). \tag{85}$$

Cette valeur est incompatible avec la condition (84).

Si, pour simplifier, nous supposons que la courbure riemanienne a effectivement, au premier ordre, l'expression (85), ([19]), la condition (83) se réduit à

$$\partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu = \frac{\lambda}{2}\varphi_{\mu\nu} \tag{83'}$$

dans le cas (0),

$$\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu = \frac{\lambda}{3}\frac{1}{1 - m^{(a)}}\varphi_{\mu\nu} \tag{83''}$$

dans les autres cas.

Notons que si $m^{(a)} \neq 1$ c'est-à-dire dans les cas (1), (2) ou (3), on peut poser

$$\frac{\lambda}{3} = (1 - m^{(a)})\left(\frac{4\lambda}{3} - \alpha^{(a)}\right), \quad \text{avec } \alpha^{(a)}\ \frac{2\lambda}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{5\lambda}{6}.$$

([19]) Cette solution, compatible avec $\mathring{G}_{\mu\nu} \simeq \lambda\gamma_{\mu\nu}$, est au 2e ordre près une solution possible. (*Cf.* ci-après, § 9.)

Les équations électromagnétiques se réduisent alors aux deux groupes suivants :

$$\mathring{D}^\rho \varphi_{\mu\rho} = 0, \qquad \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu = \frac{\lambda}{2} \varphi_{\mu\nu} \tag{86$_1$}$$

dans le cas (0);

$$\mathring{D}^\rho \varphi_{\mu\rho} = f_\mu, \quad (\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) = \left(\frac{4\lambda}{3} - \alpha^{(a)}\right) \varphi_{\mu\nu} \tag{86$_{2,3}$}$$

dans les autres cas. De toutes façons, l'équation de propagation (80) se réduit à

$$\mathring{\Box} \varphi_{\mu\nu} = \alpha^{(a)} \varphi_{\mu\nu}. \tag{87}$$

avec

$$\alpha^{(a)} = \frac{4\lambda}{3}, \quad \frac{2\lambda}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{5\lambda}{6}.$$

Ainsi, le choix $R^{(0)}_{\mu\nu}$ conduit aux équations bien connues qui décrivent la propagation d'un champ maxwellien dans un espace de Riemann à courbure constante satisfaisant (85) ([19]). Le quadrivecteur Γ_ρ proportionnel au potentiel ne peut être annulé arbitrairement, ce qui constitue une difficulté sérieuse pour la théorie ([20]). Si $\Gamma_\rho = -\mu_1^2 A_\rho$, on obtient

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \varphi_{\mu\nu}, \quad \text{avec} \quad \mu_1^2 = -\frac{\lambda}{2}. \tag{88}$$

Au contraire, le choix $R^{(1)}_{\mu\nu}$ ou $R^{(3)}_{\mu\nu}$ conduit à faire jouer au courant f_μ (nul dans le cas du choix $R^{(1)}$ le rôle du potentiel électromagnétique. En posant

$$f_\rho = -\mu^2 A_\rho,$$

on obtient

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \varphi_{\mu\nu}, \quad \text{avec} \quad (1 - m^{(a)})\mu^2 = -\frac{\lambda}{3}. \tag{89}$$

Quel que soit le choix du tenseur de base, la condition maxwellienne $\varphi_{\mu\nu\rho} = 0$ n'est pas imposée par la théorie unitaire des champs. Elle peut seulement être postulée si certaines conditions sont remplies.

9. Les équations de la gravitation dans le cas maxwellien. — Nous avons obtenu l'expression (82) qui détermine, au 3e ordre près, la valeur de $\mathring{G}_{\mu\nu}$ en fonction des champs. Dans le cas maxwellien où la condition $\varphi_{\mu\nu\rho} = 0$ est remplie, cette expression se simplifie. On a

$$\begin{aligned}\mathring{G}_{\mu\nu} = {} & \lambda\gamma_{\mu\nu} - \alpha^{(a)} E_{\mu\nu} - D^\lambda \varphi_\mu{}^\rho D_\lambda \varphi_{\rho\nu} \\ & + \frac{1}{2} \varphi^{\rho\sigma} \mathring{D}_\mu \mathring{D}_\nu \varphi_{\rho\sigma} + \frac{2\lambda}{3} \gamma_{\mu\nu} F \\ & + \frac{1}{2}(D_{\bar\mu} f_\nu + D_{\bar\nu} f_\mu) + \frac{1}{2}(\varphi_{\mu\sigma} D_\nu f^\sigma + \varphi_{\nu\sigma} D_\mu f^\sigma) \\ & + m^{(a)} f_\mu f_\nu - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} f_\rho f^\rho.\end{aligned} \tag{90}$$

$E_{\mu\nu}$ est le tenseur de Maxwell défini par l'expression bien connue

$$E_{\mu\nu} = \varphi_\mu{}^\rho \varphi_{\rho\nu} + \frac{1}{4} \gamma_{\mu\nu} \varphi_{\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma}. \tag{91}$$

En formant l'expression à divergence nulle

$$\mathring{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \mathring{G} + \lambda\gamma_{\mu\nu},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\mathring{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \mathring{G} + \lambda\gamma_{\mu\nu} = {} & -\alpha^{(a)} E_{\mu\nu} + E'_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu}(E' + M).\end{aligned} \tag{92}$$

A côté de $E_{\mu\nu}$, on voit donc intervenir un tenseur électromagnétique supplémentaire

$$E'_{\mu\nu} = -D^\lambda \varphi_\mu{}^\rho D_\lambda \varphi_{\rho\nu} + \frac{1}{2} \varphi^{\rho\sigma} D_\mu D_\nu \varphi_{\rho\sigma} + \frac{2\lambda}{3} \gamma_{\mu\nu} F. \tag{93}$$

Enfin $M_{\mu\nu}$ est le tenseur matériel défini de la façon suivante en fonction du courant :

$$\begin{aligned}M_{\mu\nu} = {} & \frac{1}{2}(\varphi_{\mu\sigma} D_\nu f^\sigma + \varphi_{\nu\sigma} D_\mu f^\sigma) \\ & + \frac{1}{2}(D_{\bar\mu} f_\nu + D_{\bar\nu} f_\mu) + m^{(a)} f_\mu f_\nu - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} f_\rho f^\rho.\end{aligned} \tag{94}$$

On vérifie facilement que la divergence du second membre de (92) est nulle, elle aussi ([21]).

10. Masse et constante cosmologique. — Si l'on rapproche les équations obtenues au paragraphe 8 des relations déduites des théories quantiques — équations de la particule de spin 1 —, on constate que les unes et les autres introduisent des termes supplémentaires, dits termes de masse, dans les équations maxwelliennes. On a

$$\partial^\rho \varphi_{\mu\rho} = -\mu^2 A_\mu, \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{2\pi}{h} \mu_0 c.$$

Pour réaliser une sorte de correspondance entre les théories, il faudrait donc reprendre les relations (88) ou (89) en donnant à la constante μ la signification $\frac{2\pi}{h}\mu_0 c$. On obtiendrait ainsi

$$\mu_1^2 = -\frac{\lambda}{2} \quad \text{ou} \quad \mu^2 = -\frac{2\lambda}{3}, \quad \mu^2 = -\frac{\lambda}{2},$$

c'est-à-dire, pour μ_0, l'ordre de grandeur déterminé par $\lambda = -\frac{3}{\mathcal{R}^2}$, $\mathcal{R}$ étant le rayon de courbure de

([21]) On constate que la divergence du second membre s'annule si

$$\left[\left(\frac{4\lambda}{3} - \alpha\right)(1 - m^{(a)}) - \frac{\lambda}{3}\right] f_{\bar\mu} = 0.$$

Les diverses possibilités dans le choix du tenseur $R_{\mu\nu}$ restent donc toutes trois acceptables : $R^{(0)}_{\mu\nu}$ entraîne $f_{\bar\mu} = 0$,

$$R^{(1)}_{\mu\nu}\left(m^{(2)} = \frac{1}{2}, \ \alpha^{(2)} = \frac{2\lambda}{3}\right) \quad \text{et} \quad R^{(3)}_{\mu\nu}\left(m^{(3)} = \frac{1}{3}, \ \alpha^{(3)} = \frac{5\lambda}{6}\right)$$

sont tels que [ ] = 0.

l'espace à courbure constante du type de de Sitter

$$\mu_0 = \frac{h}{2\pi \mathcal{R} c} \simeq 10^{-63}\,\text{g} \quad \text{si} \quad \mathcal{R} = 10^{25}\,\text{cm}. \qquad (101)$$

Bien entendu, cette égalité traduit un rapprochement purement formel. La théorie géométrique permet simplement de déterminer la valeur $\left(-\frac{2\lambda}{3},\right.$ par exemple$\left.\right)$ d'une certaine constante μ^2. Rapprocher cette valeur de $\frac{4\pi}{h^2}\mu_0^2 c^2$ introduite par les théories quantiques constitue une équivalence de langage qui laisse les deux descriptions possibles — corpusculaire et géométrique — complètement étrangères l'une à l'autre. Il en irait différemment si l'on pouvait imaginer, par exemple, une relation de cause à effet entre le champ corpusculaire et les structures géométriques de l'univers; ou bien encore, inversement, si l'on pouvait trouver dans les équations rigoureuses des champs la justification de l'existence des particules élémentaires.

Manuscrit reçu le 16 novembre 1951.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 13, AVRIL 1952, PAGE 185.

ÉTUDES DES MOUVEMENTS HÉLICOÏDAUX DE PARTICULES D'ACIER SOUMISES A L'ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE DANS UN FAISCEAU LUMINEUX INTENSE

Par Henri DANAN (1).

Sommaire. — Des particules de 10^{-3} à 10^{-5} cm de diamètre obtenues par pulvérisation d'acier à l'arc électrique et soumises à l'action d'un champ magnétique dans un faisceau lumineux intense, montrent souvent des mouvements hélicoïdaux d'axe parallèle aux lignes de force du champ. Dans ces mouvements la composante axiale s'inverse avec le sens du champ.

On a étudié ce phénomène à deux points de vue distincts :

1° Le sens de rotation du mouvement dépend-il de l'état électrique des particules observées ?

2° Comment varient les différents paramètres du mouvement : pas, diamètre, fréquence, lorsqu'on fait varier l'intensité du champ magnétique.

On a pu établir que :

1° Le sens de rotation ne dépend pas de l'état électrique des particules observées ;

2° Lorsqu'on fait varier l'intensité du champ magnétique, les paramètres du mouvement varient, ce que l'on peut mettre en évidence en photographiant les trajectoires pour deux ou plusieurs valeurs de l'intensité du champ magnétique. Ces variations sont telles que la vitesse vraie de la particule considérée

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{rot}} + \vec{v}_{\text{transl}}$$

reste inchangée. Il en résulte que l'énergie cinétique totale de la particule est elle-même constante. Il semble donc que la particule ne reçoit pas son énergie du champ magnétique, lequel ne paraît jouer qu'un rôle secondaire dans les mouvements étudiés.

1. Historique. — Le phénomène étudié ici a été découvert par F. Ehrenhaft [1] et dénommé par lui magnétophotophorèse. Il en a poursuivi l'étude en Amérique et dans ses laboratoires de Vienne.

Lorsque de fines particules de Fe, d'acier, de permalloy, de Ni ou de Co, que l'on peut obtenir par pulvérisation à l'arc électrique par exemple, et dont l'ordre de grandeur varie de 10^{-3} à 10^{-6} cm de diamètre, sont observées dans un faisceau lumineux intense on constate, en établissant un champ magnétique de direction quelconque, l'apparition d'un mouvement distinct du mouvement brownien : un grand nombre de particules sont animées d'un mouvement de direction parallèle (ou tangente) aux lignes de force du champ, les unes dans le sens du champ, les autres en sens contraire. D'autre part, le vecteur vitesse de ces particules change de sens lorsqu'on inverse le sens du champ magnétique. Un examen approfondi de ces mouvements montre que la plupart des trajectoires ne sont pas rectilignes, mais se présentent sous forme de fines hélices, dont le pas, le diamètre, la fréquence varient d'une particule à l'autre. Dans ce cas encore la composante axiale de la vitesse s'inverse avec le sens du champ magnétique. La figure 1 montre une de ces trajectoires pour deux valeurs de l'intensité du champ.

(1) Travail exécuté au Premier Institut de Physique de l'Université de Vienne.

Pour expliquer ces mouvements et le fait que la composante parallèle au champ s'inverse avec le sens du champ, F. Ehrenhaft a proposé d'attribuer aux particules se déplaçant dans le sens du champ un excès de magnétisme Nord (pôles Nord) et à celles se déplaçant dans le sens inverse du champ, un excès de magnétisme Sud (pôles Sud) [1]. Mais cette hypothèse ne rend pas compte des trajectoires hélicoïdales et elle suppose que les particules reçoivent leur énergie du champ magnétique. Ce dernier point est en contradiction avec les résultats qu'on a obtenus dans la deuxième partie de ce travail.

Dans les recherches exposées ci-dessous on s'était proposé de rechercher, d'une part si les mouvements hélicoïdaux n'étaient pas dus à des forces électriques (action d'un champ magnétique sur une particule électrisée), d'autre part d'étudier systématiquement les modifications des trajectoires hélicoïdales pour des variations données de l'intensité du champ magnétique.

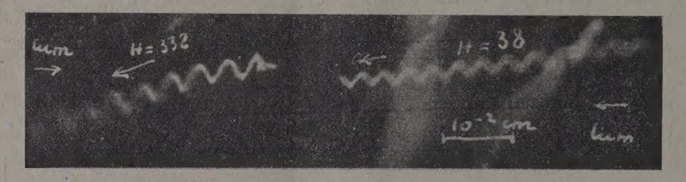


Fig. 1.

2. **Dispositif expérimental.** — Pour les deux parties de ce travail on a utilisé un dispositif expérimental analogue dans son principe à ceux déjà utilisés dans les recherches antérieures sur la magnétophotophorèse [2] :

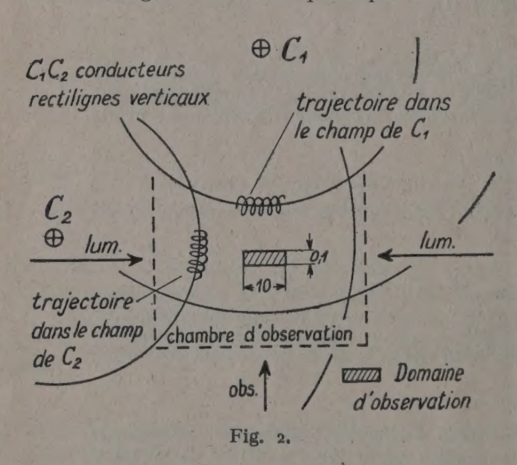


Fig. 2.

Une chambre d'observation formant en même temps condensateur (« condensateur Ehrenhaft ») permet de déterminer la polarité électrique de la particule observée et de la ramener dans le champ d'observation. L'éclairage est symétrique afin d'éliminer la vitesse de photophorèse proprement dite (²), ce qui est particulièrement important pour la deuxième partie. On utilise à cet effet deux sources et deux systèmes optiques rigoureusement semblables donnant dans la chambre d'observation deux faisceaux identiques que l'on règle de telle façon que tous leurs points soient confondus et qu'ils ne semblent plus former en définitive qu'un seul faisceau. Le microscope d'observation est perpendiculaire à la direction commune des deux faiscaux lumineux. Dans la première partie, le champ magnétique est celui de deux conducteurs verticaux rectilignes (*cf.* J. A. Schedling [2]) parcourus par un courant de 15 à 25 A donnant dans la chambre deux champs ($H \simeq 3{,}2$ gauss), l'un assimilable à un champ parallèle au faisceau, l'autre à un champ perpendiculaire au faisceau. L'emploi alterné de ces deux champs permet de déterminer, le premier la « polarité magnétique », le deuxième, le sens de rotation à droite (d) ou à gauche (g) de la particule observée (*fig.* 2).

Dans la deuxième partie, le champ magnétique est celui de deux bobines symétriques, calculées de façon à donner un champ approximativement uniforme dans la région où se déplacent les particules (uniformité effectivement réalisée à moins de 2 pour 100 près). L'intensité de ce champ peut varier de 1 à 400 gauss. Sa direction est parallèle à la direction commune des deux faisceaux lumineux. Au cours de cette deuxième partie, on a photographié les trajectoires en plaçant entre l'appareil et le microscope d'observation un obturateur électromagnétique commandé par un interrupteur à mouvement d'horlogerie, permettant d'obtenir des portions de trajectoires parcourues pendant un temps déterminé. Dans les deux cas, le sens du champ magnétique est inversé à volonté par un commutateur actionné par les pieds de l'opérateur. Un dispositif analogue permet, en outre, dans la deuxième partie de faire varier l'intensité du champ magnétique.

(²) On sait que le phénomène de photophorèse découvert en 1910 par F. Ehrenhaft [3] consiste en un mouvement de particules dans le sens de la lumière (photophorèse positive) ou en sens contraire (photophorèse négative). *Voir* aussi à ce sujet P. Tauzin [4].

3. **Résultats.** — *a.* Pour la première partie, les résultats sont indiqués dans le tableau I, dans lequel on a, conventionnellement et suivant la terminologie de F. Ehrenhaft, attribué un excès de magnétisme Nord (particules désignées par N) à celles des particules qui se déplacent dans le sens du champ, un excès de magnétisme Sud (particules désignées par S) à celles qui se déplacent en sens contraire du champ. Les mouvements à droite et à gauche sont respectivement désignés par les lettres d et g. Les charges électriques désignées par le symbole $\simeq$ o se rapportent à des particules sur lesquelles on n'a pu observer aucune action électrique dans un champ de 1100 V : cm. Enfin, on a conservé dans ce tableau des particules dont le mouvement apparaît comme rectiligne avec le grossissement utilisé (désignées par un tiret dans la colonne : sens de rotation).

TABLEAU I.

Particules n°.	q_{magn}.	$e_{élec}$.	Sens de rotation.	Particules.	q_{magn}.	$e_{élec}$.	Sens de rotation.
1....	N	—	g	37....	N	—	d
2....	S	+	d	38....	S	+	g
3....	N	+	g	39....	S	—	d
4....	N	$\simeq$ o	-	40....	S	—	d
5....	N	+	d	41....	N	—	g
6....	S	$\simeq$ o	d	42....	S	+	d
7....	S	—	g	43....	S	—	d
8....	N	+	g	44....	S	+	g
9....	N	$\simeq$ o	-	45....	S	+	d
10....	S	+	d	46....	N	—	d
11....	N	—	-	47....	S	—	-
12....	N	+	d	48....	S	—	g
13....	N	—	d	49....	S	+	g
14....	N	$\simeq$ o	-	50....	S	+	g
15....	N	$\simeq$ o	g	51....	N	+	d
16....	N	—	g	52....	N	—	g
17....	N	+	g	53....	N	—	g
18....	S	+	g	54....	S	+	d
19....	N	—	d	55....	N	—	d
20....	S	+	g	56....	N	+	g
21....	S	+	d	57....	N	—	d
22....	N	—	g	58....	S	—	g
23....	S	—	g	59....	N	+	d
24....	N	+	g	60....	S	—	d
25....	N	—	d	61....	N	+	g
26....	N	—	g	62....	N	$\simeq$ o	-
27....	N	+	g	63....	N	—	g
28....	N	+	-	64....	S	+	d
29....	N	—	g	65....	S	—	g
30....	S	—	g	66....	S	—	g
31....	S	—	g	67....	N	—	d
32....	S	$\simeq$ o	g	68....	N	—	d
33....	N	$\simeq$ o	-	69....	S	+	g
34....	N	—	g	70....	S	$\simeq$ o	d
35....	N	+	g	71....	N	—	g
36....	N	+	d	72....	S	—	d

L'examen de ce tableau montre que les sens de rotation à droite et à gauche se rencontrent pour toutes les combinaisons possibles des charges électriques et « magnétiques » et qu'on observe des mouvements hélicoïdaux même sur des particules portant des charges très faibles, pour ne pas dire nulles.

On a donc ce premier résultat important :

Le sens de rotation du mouvement hélicoïdal des particules montrant le phénomène de magnétophotophorèse ne dépend pas de l'état électrique de ces particules.

b. Étude des trajectoires. — Les mesures effectuées ont porté sur deux groupes : l'un de 14 particules pour deux valeurs de l'intensité du champ, l'autre de quatre particules dont deux pour quatre valeurs de l'intensité du champ, une pour trois valeurs et une pour deux valeurs de l'intensité du champ. Les résultats exposés ci-dessous ont été déduits d'abord de l'étude du premier groupe; le deuxième groupe de mesures a été effectué à titre de contrôle; les résultats sont en parfait accord avec ceux du premier groupe.

Dans chaque cas, pour chaque valeur de l'intensité du champ magnétique on a déterminé : le diamètre (D) et le pas (P) de la trajectoire et la vitesse de translation du mouvement. La fréquence (N), que l'on peut aussi déduire des photographies, a été calculée par la formule

$$N = \frac{v_{transl}}{P}.$$

Les résultats sont donnés dans les tableaux II et II *a*.

On remarque d'abord dans le tableau II qu'en général :

— Une variation de l'intensité du champ magnétique qui provoque une modification donnée du pas de la trajectoire détermine en même temps une variation de même sens du diamètre et une variation en sens inverse de la fréquence du mouvement;

— Une variation de l'intensité du champ magnétique qui laisse inchangé l'un quelconque des trois paramètres, n'affecte pas les deux autres.

Ces remarques ont conduit à calculer la vitesse tangentielle des particules dans le mouvement de rotation composant du mouvement hélicoïdal, vitesse qui est proportionnelle au produit ND et qui vaut

$$v_{rot} = \pi ND$$

et à la comparer à la vitesse de translation

$$v_{transl} = NP.$$

On en déduit la vitesse vraie des particules le long de leurs trajectoires, vitesse qui est donnée par

$$v = \sqrt{v_{rot}^2 + v_{transl}^2} = N\sqrt{\pi^2 D^2 + P^2}.$$

TABLEAU II.

Particules n°.	Pas. $H = 38$.	Pas. $H = 332$.	Diamètre. $H = 38$.	Diamètre. $H = 332$.	Fréquence. $H = 38$.	Fréquence. $H = 332$.	V_{transl}. $H = 38$.	V_{transl}. $H = 332$.
1	4,2	4,4	1,5	1,3	$2{,}9_4$	$3{,}0_6$	12,8	13,5
2	2,5	2,0	2,0	1,8	2,4	2,7	6,1	5,4
4	2,5	2,5	1,1	0,9	4,0	2,9	10,0	7,8
4	2,5	10	1,2	6,2	3,0	0,5	7,7	$9{,}2_5$
5	3,2	3,1	1,7	1,7	5,0	$5{,}1_5$	16,0	16,0
6	1,2	2,5	0,4	1,9	18,0	4,6	21,5	18,0
7	1,3	0,8	1,6	1,6	7,0	7,2	9,2	5,8
8	4,5	6,8	2,6	3,5	2,2	1,6	10,0	11,0
9	4,5	7,0	2,5	3,6	2,2	$1{,}5_5$	10,0	11,0
10	5,2	5,5	1,6	1,3	2,9	3,0	16,2	16,5
11	5,0	2,0	2,5	1,4	1,4	2,7	7,0	5,4
12	$4{,}5_5$	$8{,}8_5$	$1{,}4_5$	2,8	6,8	3,5	3,1	3,1
13	$1{,}4_5$	2,5	1,0	1,5	5,0	3,2	7,3	8,0
14	2,2	2,1	1,5	1,5	7,3	7,4	16,4	16,6

TABLEAU II *a*.

Particules n°.	Pas. H (en gauss). 1.	10.	49.	376.	Diamètre. H (en gauss). 1.	10.	49.	376.	Fréquence. H (en gauss). 1.	10.	49.	376.	V_{transl}. H (en gauss). 1.	10.	49.	376.
15	2,6	2,4	2,6	2,4	1,5	1,5	1,7	1,6	3,5	3,6	3,0	3,3	9,1	8,8	7,8	7,7
16	3,7	4,0	4,1	3,8	1,6	1,7	1,5	1,3	4,1	3,7	4,1	4,3	15,3	14,8	16,8	16,3
17	–	3,6	2,6	2,8	-	1,6	1,5	1,4		2,6	3,0	3,2	–	9,4	8,0	8,9
18	–	–	11,4	17,8	–	–	2,5	3,0			2,2	1,5	–		25,4	26,0

Les longueurs sont données en 10^{-3} cm, les vitesses en 10^{-3} cm.s^{-1}, les fréquences en tours par seconde.

TABLEAU III.

Particules n°.	V_{transl}. $H=38$.	$H=332$.	$H=2{,}2$.	V_{rot}. $H=38$.	$H=332$.	$H=2{,}2$.	$V=\sqrt{V^2_{transl}+V^2_{rot}}$. $H=38$.	$H=332$.	$H=2{,}2$.
1	12,3	13,5	–	13,9	12,5	–	18,6	18,4	
2	6,1	5,4	–	15,1	15,3	–	16,3	16,2	-
3	10,0	7,2	–	13,8	8,2	–	17,1	10,9	-
4	7,7	9,2	–	11,3	9,8	–	13,7	13,5	
5	16,0	16,0	–	26,5	27,5	–	31,2	32,1	-
6	21,5	12,0	–	22,6	28,7	–	31,4	31,0	-
7	9,2	5,8	–	35,2	36,2	–	36,4	36,8	-
8	10,0	11,0		18,0	17,6	–	20,6	20,5	
9	10,0	11,0	13,8	17,3	17,1	15,5	20,0	20,3	20,7
10	15,2	16,5	–	14,6	14,2	–	21,0	21,7	–
11	7,0	5,4	-	11,0	11,9	–	13,0	13,9	–
12	3,1	3,1	–	30,8	30,8	–	31,0	31,0	–
13	7,0	5,4	–	15,7	15,1	–	17,2	17,1	-
14	16,4	15,5	-	34,4	34,9	–	38,1	38,2	–

TABLEAU III *a*.

Particules n°.	V_{transl}. H (en gauss). 1.	10.	49.	376.	V_{rot}. H (en gauss). 1.	10.	49.	376.	$V=\sqrt{V^2_{transl}+V^2_{rot}}$. H (en gauss). 1.	10.	49.	376.
15	9,1	8,8	7,8	7,7	16,5	17,0	16,0	16,6	18,9	19,2	17,8	18,3
16	15,3	14,8	16,8	16,3	20,8	19,8	19,3	17,6	25,8	24,8	25,6	24,0
17		9,4	8,0	8,9	–	13,1	14,2	14,0	–	16,1	16,3	16,6
18	–		25,4	26,0	–	–	17,5	14,1	–	–	30,9	29,6

Les vitesses sont données en 10^{-3} cm.s^{-1}.

Les résultats ainsi obtenus sont donnés, pour le premier groupe dans le tableau III, pour le deuxième groupe dans le tableau III *a*. Les figures 3, 4 et 5 reproduisent quelques-unes des trajectoires.

On voit qu'aux erreurs d'expérience près — v est mesurée avec une précision de l'ordre de 6 à 10 pour 100 — et si l'on excepte la particule n° 3, la vitesse vraie des particules n'est pas influencée par des variations de l'intensité du champ magnétique entre 1 et 380 gauss.

Il en résulte que l'énergie cinétique des particules $E = \frac{1}{2} mv^2$ reste constante et que les particules ne reçoivent pas d'énergie du champ magnétique. En fait, il faut tenir compte dans le calcul de l'énergie cinétique totale d'un mouvement de rotation de la particule sur elle-même, mouvement plus ou moins rapide suivant les particules et dont il est difficile d'étudier les variations. Toutefois, on a pu calculer que le terme $\frac{I\omega^2}{2}$ ainsi introduit est de l'ordre de $1/100^e$ environ du terme $\frac{mv^2}{2}$ et inférieur, par conséquent, aux erreurs d'expériences. Il nous paraît logique d'admettre que les variations éventuelles de l'énergie cinétique de rotation de la particule sur elle-même obéissent à la loi générale et qu'en définitive on a effectivement conservation de l'énergie cinétique totale.

De toute façon, il semble que ces derniers résultats permettent d'écarter la possibilité d'un excès de magnétisme unipolaire sur les particules montrant le phénomène de magnétophotophorèse.

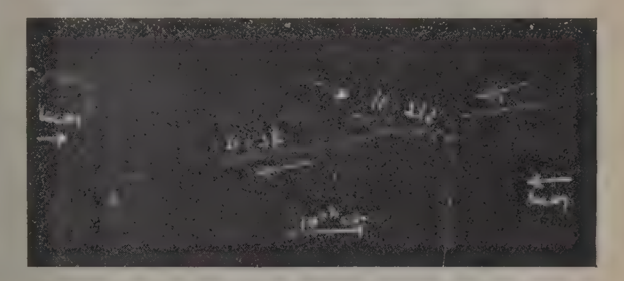


Fig. 3.

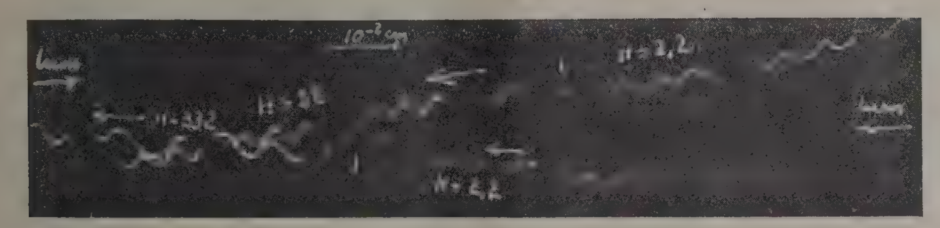


Fig. 4.

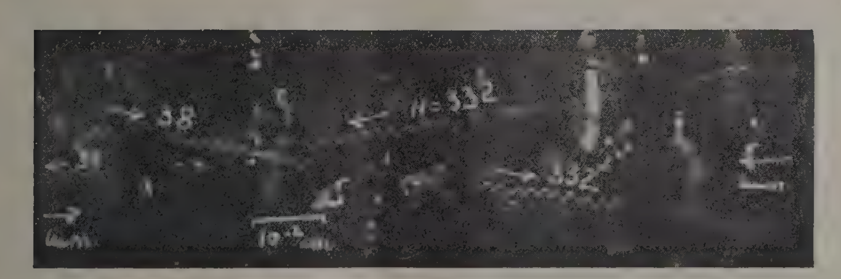


Fig. 5.

Ce travail a été exécuté au premier Institut de Physique de l'Université de Vienne sous la direction de son Directeur, le Professeur Félix Ehrenhaft auquel je tiens à exprimer ici toute ma gratitude pour l'intérêt constant qu'il a pris à mes recherches et les précieux conseils dont il m'a assisté.

Je tiens à exprimer également mes remerciements à M. le Professeur G. Foëx, qui a bien voulu s'intéresser vivement à ce travail et m'en faciliter la publication.

Manuscrit reçu le 31 octobre 1951.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Ehrenhaft F. — *Phil. Mag.*, 1931, **11**, 140; *Ann. Physik*, mars-avril 1940, 11e s., **13**; *J. Frank. Inst.*, 1940, **230**, 381; *C. R. Acad. Sc.*, 1946, **222**, 1100-1103 et 1345; *Ibid.*, 1947, **224**, 1151-1152; *Science*, 1945, **101**, 676.

[2] Schedling J. A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **227**, 470. Votava E. — *Thèse*, Vienne, 1949.

[3] Ehrenhaft F. — *Wiener Akad. Ber.*, 1910, **119**, 835; *C. R. Acad. Sc.*, 1930, **190**, 263.

[4] Tauzin P. — *J. Physique Rad.*, 1949, **10**, 90.

SUR LES TRANSITIONS β ET LA STRUCTURE NUCLÉAIRE.
II. CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES : PROBABILITÉS DE TRANSITION β (1).

Par R. NATAF,
Collège de France, Laboratoire de Chimie Nucléaire, Paris.

et R. BOUCHEZ,
Université de Paris, Institut du Radium, Laboratoire Curie.

Sommaire. — On donne les expressions des probabilités de transition β partielles d'une configuration (L, S) du noyau initial à une configuration (L', S') du noyau final en admettant, suivant les hypothèses développés dans (I), que les parités de L, L' sont celles des états initial et final respectivement. Ces expressions dépendent de $\Delta J \equiv | J - J' |$ et de $\Delta L \equiv | L - L' |$.

La probabilité de transition β totale de l'état nucléaire initial à l'état final se déduit des amplitudes de probabilités partielles, si l'on connaît les amplitudes respectives des configurations possibles (L, S) et (L', S') composant ces états.

Lorsqu'il intervient plusieurs configurations avec des amplitudes du même ordre, une seule probabilité partielle intervient pratiquement et l'on retrouve les expressions usuelles dépendant de ΔJ et du *changement de parité*.

Sur la théorie de la désintégration β. — Les hypothèses sur la structure nucléaire que l'on a données (Art. I) peuvent être appliquées à l'étude de la désintégration β. Mais la théorie usuelle fait intervenir seulement le nombre quantique J et la parité de la fonction propre du noyau dans les règles de sélection; il nous a donc semblé utile de développer la théorie en introduisant le nombre quantique de moment orbital L. Lorsqu'on aura calculé les probabilités de transition en fonction de J et L, on pourra les comparer à la structure des niveaux nucléaires en tenant compte de toutes les transitions possibles entre les configurations de l'état initial $(L_1, L_2, ...)$ vers celles de l'état final $(L'_1, L'_2, ...)$, mais en général le nombre de ces termes sera très petit.

Probabilités de transitions β d'après la théorie de Fermi.

1. Choix de l'interaction nucléon-leptons. — Considérons, en première approximation, une transition β résultant de la transition d'un seul nucléon, qui passe de l'état initial Ψ_i à l'état final Ψ_f avec émission d'un électron ψ et absorption d'un neutrino φ (à énergie négative). L'élément de matrice H'_{fi} correspondant à cette transition, calculé par la théorie des perturbations à partir de Ψ^*_f, Ψ_i, ψ et φ, permet d'obtenir la probabilité P de transition par unité de temps (2)

$$P = 2\pi \mathbf{g}^2 | H'_{fi} |^2 \qquad (\mathbf{g} = \text{const. de Fermi}) \quad (^3) \qquad (1)$$

Les opérateurs permettant de calculer H'_{fi} ne sont pas connus *a priori*, mais la théorie générale montre que la densité H_{fi}, telle que $H'_{fi} \equiv \int H_{fi} \, d\tau$, doit être un invariant relativiste construit avec les spineurs Ψ_i, Ψ_f, ψ et φ; ceci conduit à cinq formes (4) possibles d'interaction pour H_{fi} :

$$\begin{aligned}
S &\equiv (\Psi^*_f \beta \Psi_i)(\psi^* \beta \varphi), \\
V &\equiv (\Psi^*_f \Psi_i)(\psi^* \varphi) && - (\Psi^*_f \vec{\alpha} \Psi_i)(\psi^* \vec{\alpha} \varphi), \\
T &\equiv (\Psi^*_f \beta \vec{\sigma} \Psi_i)(\psi^* \beta \vec{\sigma} \varphi) && + (\Psi^*_f \beta \vec{\alpha} \Psi_i)(\psi^* \beta \vec{\alpha} \varphi), \\
A &\equiv (\Psi^*_f \vec{\sigma} \Psi_i)(\psi^* \vec{\sigma} \varphi) && - (\Psi^*_f \gamma_5 \Psi_i)(\psi^* \gamma_5 \varphi), \\
P &\equiv && (\Psi^*_f \beta \gamma_5 \Psi_i)(\psi^* \beta \gamma_5 \varphi).
\end{aligned}$$

Grands termes (5). Petits termes.

(1) Suite de l'article I. *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 8.

(2) *Unités :* on utilise le système d'unités universelles relativistes; les unités de ce système sont :

m_0, masse de l'électron au repos;
c, vitesse de la lumière;
$\hbar$, constante de Planck divisée par 2π.

Dans ce système, l'unité de longueur est la longueur d'onde Compton

$$\frac{\hbar}{m_0 c} = 3{,}85 \cdot 10^{-11}\ \text{cm},$$

et l'unité de temps

$$\frac{\hbar}{m_0 c^2} = 1{,}28 \cdot 10^{-21}\ \text{s}.$$

Remarquons qu'il existe aussi un système d'unités universelles atomiques utilisées par Hartree, dont les unités sont m_0, $\hbar$ et e : charge de l'électron en valeur absolue.

(3) Dans cette relation, les fonctions propres sont normées par intervalle unité d'énergie. Dans le cas général, (1) s'écrirait

$$P = 2\pi \mathbf{g}^2 | H'_{fi} |^2 \rho_f,$$

ρ_f étant le nombre des états finaux par intervalle unité d'énergie.

(4) Les matrices de Dirac β et α_i $(i = 1, 2, 3)$ et les matrices $\vec{\sigma}$ et γ_5 sont indiquées dans [4].

(5) Chacune des formes V, T, A comprend deux termes;

H_{fi} peut être formée par une combinaison linéaire de ces cinq formes; toutefois l'expérience permet de restreindre ce choix.

En effet, la comparaison de la théorie avec les résultats expérimentaux indique que [1] :

a. L'interaction T ou A intervient en grande proportion dans H_{fi}; ces deux formes seules conduisant à la règle de Gamow-Teller, $\Delta J = 0$ ou 1, sans changement de parité, pour les transitions permises;

b. Les interactions T et A ne figurent pas toutes deux dans H_{fi}, il en est de même pour S et V; en effet, s'il en était ainsi, on obtiendrait [2] théoriquement des formes de spectres permis non observées.

En outre, le calcul donne les résultats suivants *indépendants du choix de l'interaction* :

1° Pour les transitions permises, la forme analytique du spectre β est bien déterminée, indépendante de la combinaison choisie (il faut exclure cependant comme on l'a indiqué dans b les combinaisons contenant T et A, ou S et V);

2° Plus généralement, pour certaines variations de J et de parité, un seul de tous les termes contenus dans les cinq formes, n'est pas nul : le terme en $\beta\vec{\sigma}$ de T ou en $\vec{\sigma}$ de A et il conduit à une forme de spectre β bien déterminée; c'est le cas des transitions $\Delta J = n + 1$, ordre d'interdiction n.

Dans ces deux cas, les formes de spectre théoriques obtenues sont bien en accord avec les formes expérimentales.

Par contre, pour les transitions où ΔJ est égal à l'ordre d'interdiction ($\Delta J = n$), la forme du spectre β dépend beaucoup de la combinaison linéaire choisie pour H_{fi}. Toutefois, on ne connaît que peu de transitions probablement de ce type : ^{36}Cl, ^{87}Rb et RaE; l'interprétation des formes de ces spectres β nécessite au moins deux termes dans H_{fi} (ce qui fournit un paramètre d'ajustement), mais ces deux termes peuvent être le grand et le petit terme, $\beta\vec{\sigma}$ et $\beta\vec{\alpha}$, de l'interaction T seule. Si l'on prenait l'interaction A seule, on aurait uniquement le grand terme $\vec{\sigma}$, le terme en γ_5 qui conduit à un changement de parité différent, étant nul.

Il semble donc que l'interaction nucléon-leptons soit en première approximation l'interaction T (6).

Par raison de simplicité, nous effectuerons les calculs dans le cas de l'interaction T.

2. Principe du calcul des probabilités de transition. Résultats généraux. — On considère la transition d'un état initial caractérisé par (J, L) à un état final (J', L'); la probabilité $(JL) \to (J'L')$ s'obtient à partir de la formule générale (1) qui s'écrit, avec l'interaction T,

$$P = 2\pi g^2 \left| \int \left[\left(\Psi_f^* \beta\vec{\sigma}\Psi_i\right)\left(\psi^* \beta\vec{\sigma}\varphi\right) + \left(\Psi_f^* \beta\vec{\alpha}\Psi_i\right)\left(\psi^* \beta\vec{\alpha}\varphi\right)\right] d\tau \right|^2. \quad (2)$$

Il faut tenir compte dans ce calcul de la conservation du moment angulaire total

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Émission } \beta \left\{ \begin{array}{l} \vec{J} - \vec{J'} = \vec{j_1} + \vec{j_2} \equiv \vec{k}, \\ M - M' = m_1 + m_2 \equiv \mu; \end{array}\right. \\ \text{Capture électronique} \left\{ \begin{array}{l} \vec{J} - \vec{J'} = \vec{j_2} - \vec{j_1} \equiv \vec{k}, \\ M - M' = m_2 - m_1 \equiv \mu, \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (2')$$

(j_1, m_1) correspondant à l'électron et (j_2, m_2) au neutrino (ou anti-neutrino) émis. La probabilité (2) de la transition $(JL) \to (J'L')$ est la même, quelle que soit la valeur du nombre quantique magnétique M, à condition de sommer sur toutes les valeurs du nombre quantique M'; c'est dire encore que

$$\sum_{M'} P(JLM \to J'L'M')$$

est indépendante de M. Cette règle est bien connue en physique atomique et a été pour la première fois énoncée par Marshak [3] en physique nucléaire. Elle a été démontrée dans le cas des transitions permises, par de Groot, Tolhoek et nous-mêmes [4] et dans le cas des transitions interdites, lorsque l'opérateur d'interaction est un tenseur d'ordre quelconque, par de Groot et Tolhoek [5]. Mais on peut, *a priori*, s'attendre à une telle règle qui peut être envisagée comme une conséquence de l'invariance de l'hamiltonien du système dans les rotations de l'espace, puisque cette règle exprime que la probabilité totale P $(JLM \to J'L')$ est indépendante de l'orientation de $\vec{J}$. Pratiquement, on choisit la valeur de M qui conduit au calcul le plus simple et l'on prend $M = J$.

En outre, si P représente la probabilité totale de

... second terme étant de l'ordre de $\frac{v}{c}$ par rapport au premier : $\simeq 0{,}17$ pour les nucléons dans les noyaux. Ces deux termes sont analogues aux interactions magnétique et électrique pour les transitions γ.

(6) Ceci a été mis en doute par LONGMIRE, WU et TOWNES, *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 695, interprétant leur spectre expérimental du ^{36}Cl; ces auteurs pensaient ne pouvoir obtenir théoriquement une telle forme qu'en utilisant une combinaison de deux interactions leur donnant au moins deux paramètres d'ajustement (T, S), (T, V) ou (A, V). Mais, récemment, C. S. WU, *Phys. Rev.*, 1951, **82**, 957-8 L et FULBRIGHT et MILTON, *Phys. Rev.*, 1951, **82**, 274 L, ont indiqué que l'interaction T seule pouvait suffire à l'interprétation.

D'autre part, il est difficile d'interpréter les valeurs de ft pour les transitions superpermises avec une interaction T seule (R. BOUCHEZ et R. NATAF, *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 86-89).

la transition $(JL) \to (J'L')$, P' celle de la transition formelle inverse $(J'L') \to (J\,L)$, il existe [3], [5] entre P et P' la relation

$$P = \frac{2J'+1}{2J+1} P';$$

c'est la règle d'Ornstein-Burger, également bien connue en physique atomique, conséquence du théorème précédent.

On utilise pour effectuer ce calcul la méthode des harmoniques sphériques d'abord indiquée par Marshak [3]; les fonctions propres ψ et φ ont la forme générale indiquée dans l'Appendice [éq. (8)]. Les expressions de f_l et g_l pour l'électron dans le champ coulombien du noyau et pour le neutrino sont données dans [4]. Ces fonctions radiales prises à la surface du noyau pour $r = R$ (rayon du noyau) sont d'autant plus petites que j_1 j_2 sont plus grands : elles sont de l'ordre $(pR)^{j_1-\frac{1}{2}}$, $(qR)^{j_2-\frac{1}{2}}$ respectivement (7). Les fonctions angulaires Y_l associées ont leur indice l croissant avec j_1 ou j_2. Comme le produit de ces fonctions radiales de l'électron et du neutrino apparait dans les facteurs leptoniques $\vec{B} \equiv \psi^* \beta \vec{\sigma} \varphi$ et $A \equiv \psi^* \beta \vec{\alpha} \varphi$, on voit que P est d'autant plus grand que j_1 et j_2 sont plus petits. P est sensiblement du même ordre pour toutes les valeurs de j_1, j_2 telles $j_1 + j_2 = k$; la plus petite valeur de k possible $\left(k = 1,\ j_1 = j_2 = \frac{1}{2}\right)$ correspond aux transitions permises. La probabilité totale P s'écrit (8) donc

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1};$$

en pratique, on se limitera au premier terme non nul.

En tenant compte des règles précédentes, la probabilité (2) de la transition $(J\,L) \to (J'L')$ avec $\Omega \equiv \beta\vec{\sigma}$ ou $\beta\vec{\alpha}$ s'écrit

$$P_{k-1} = 2\pi g^2 \sum_{M'} \sum_{j_1+j_2=k} \sum_{m_1, m_2} \left| \int (\Psi^*_{J'L'M'} \Omega \Psi_{JLM=J}) \times (\psi^*_{j_1 m_1} \Omega \varphi_{j_2 m_2})\, \mathrm{d}\tau \right|^2. \quad (3)$$

On effectue le calcul dans le sens $J \to J'$ où $J > J'$ et l'on multiplie ensuite par le facteur statistique $\frac{2J'+1}{2J+1}$ si la transition *réelle* correspond à $(J'L') \to (JL)$

Remarques sur les relations d'invariance concernant le moment orbital et la parité. — La probabilité de transition étant un invariant scalaire, l'espace qu'il sous-tend est d'ordre zéro, on le représente par D_0 et l'on peut écrire, à partir de la formule (3),

$$D_0 = D_{L'}\, D(\Omega)\, D_L\, D(\psi^*_{j_1} \Omega \varphi_{j_2})$$

ou encore, plus simplement,

$$\boxed{D_L D_{L'}\, D(\Omega) = D(\psi^* \Omega \varphi),} \quad (4)$$

$D\,(\Omega)$ étant la représentation (9) correspondant à l'opérateur Ω

$$D(\beta\vec{\sigma}) = 0, \qquad D(\beta\vec{\alpha}) = 1.$$

La relation d'invariance concernant la parité peut s'écrire, à partir de (3),

$$\Pi(\psi_L)\, \Pi(\psi_{L'})\, \Pi(\Omega)\, \Pi(\psi^* \Omega \varphi) = 1; \quad (5)$$

$\Pi(\psi) = \pm 1$ suivant que la parité de ψ est paire ou impaire. On suppose le noyau initial dans l'état (JL) et le noyau final dans l'état $(J'\,L')$; avec notre approximation 2.3.3 (1re partie) les parités de ψ_L et $\psi_{L'}$ sont $(-1)^L$ et $(-1)^{L'}$. La relation (5) peut donc s'écrire avec $\Delta L = |L - L'|$,

$$\boxed{\Pi(\Delta L)\, \Pi(\Omega) = \Pi(\psi^* \Omega \varphi).} \quad (6)$$

Les relations (4) et (6) permettent de limiter le choix des fonctions ψ et φ et sont très utiles dans le calcul des probabilités de transition.

Ces relations sont valables aussi bien pour l'émission β que pour la capture d'électrons. Lors de l'émission β, le facteur dépendant des leptons s'écrit $(\psi_+^* \Omega \varphi_-)$ ou (10) $(\psi_+ \Omega^* C \varphi_+)^*$; pour la capture d'électrons, il y a capture d'un électron dans un état stationnaire et émission d'un neutrino dans un état d'énergie positive, l'élément de matrice s'écrit $(\varphi_+^* \Omega \psi) = (\psi^* \Omega^* \varphi_+)$.

Suivant les valeurs de ΔL, ΔJ, on aura à considérer des fonctions propres ψ et φ de types différents ou de même type $\left(l = j \pm \frac{1}{2}\right)$.

3. **Règles de sélection en ΔL.** — En général, pour une transition au cours de laquelle une seule particule de longueur d'onde $\lambda\!\!\!{}^-$ est émise, les ordres d'interdiction successifs apparaissent quand on considère le développement de la probabilité de transition en puissances successives de $\frac{R}{\lambda\!\!\!{}^-}$ avec $\lambda\!\!\!{}^- \gg R$ et que l'on tient compte seulement du premier terme non nul. Ce développement coïncide en fait avec celui suivant les valeurs croissantes de j (moment

(7) p et q sont les impulsions de l'électron et du neutrino (en unités universelles).

(8) Dans [1] l'indice caractéristique est k au lieu de $k-1$, nous l'avons modifié pour noter P_0 les transitions permises.

(9) Avec nos hypothèses, on peut séparer pour le noyau « l'espace ordinaire » et « l'espace des spins » (représentation de Pauli). Les représentations sont prises dans l'espace ordinaire, où $D(\beta\vec{\sigma}) = 0$; le spin doit être considéré comme un invariant. Par contre, $D(\beta\vec{\alpha})$ peut être remplacé par $D(\vec{x})$, puisque

$$\langle f | \beta\vec{\alpha} | i \rangle \sim \langle f | \vec{x} | i \rangle = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle f | \vec{x} | i \rangle.$$

(10) On sait que si φ_+ est une solution correspondant à l'énergie $+E$, la solution pour l'énergie $-E$ s'écrit

$$\varphi_-^* \equiv C\varphi_+, \qquad \text{avec} \quad C \equiv \begin{pmatrix} & & & +1 \\ & & -1 & \\ & -1 & & \\ +1 & & & \end{pmatrix} = i\beta\alpha_2.$$

angulaire total emporté par la particule); la partie principale de ce développement correspond donc à la valeur minimum de j comptabile avec la transition. Cette valeur minimum est au moins [11] égale à ΔJ; d'une manière générale, plus ΔJ est élevé, plus le premier terme non nul du développement est d'ordre élevé en $\frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}$ et plus P est petite.

Dans le cas des transitions β, deux particules interviennent, ce qui apporte une complication, car elles peuvent être émises avec leurs spins ↑↑ ou ↑↓. La détermination de la partie principale du développement suivant les valeurs croissantes de j_1 et j_2 permet d'établir les règles de sélection. Ces règles résultent, dans notre hypothèse, non seulement de la conservation (2′) et (6) du moment angulaire total et de la parité, mais plus précisément de la conservation (4) du moment orbital; on les exprimera à l'aide de ΔL.

3.1. Facteur leptonique dans l'élément de matrice global. — Appliquons les principes du paragraphe précédent 2, en examinant dans chaque cas les fonctions angulaires des leptons.

3.1.1. *Termes en* $\vec{B} \equiv \psi^* \beta \vec{\sigma} \varphi$. — La probabilité de transition résultant d'un tel terme s'écrit, à partir de (3),

$$P_{k-1} = 2\pi \mathbf{g}^2 \sum_{\substack{j_1 m_1 \\ j_2 m_2}} \left| \int \left(\Psi^*_{J'L'M'} \beta \vec{\sigma} \Psi_{JLM} \right) \times \left(\psi^*_{j_1 m_1} \beta \vec{\sigma} \varphi_{j_2 m_2} \right) d\tau \right|^2, \qquad (7)$$

partie principale associée à la valeur minimum de $k \equiv j_1 + j_2$ compatible avec les relations (4) et (6) précédentes, c'est-à-dire telle que l'élément de matrice ne soit pas nul. D'après (6),

$$\Pi(\Delta L) = \Pi(l + l'),$$

Y_l et $Y_{l'}$ étant les fonctions angulaires leptoniques qui figurent dans $\vec{B}$.

Nous posons dans tout ce qui suit :

$$r \equiv j_1 - \frac{1}{2}, \qquad s \equiv j_2 - \frac{1}{2}, \qquad r + s \equiv k - 1.$$

1er *Cas.* — ψ et φ sont de types différents.

1° Un premier terme $\vec{B}_1$ correspond à $l = r$, $l' = s$; les facteurs angulaires sont en $Y_r\, Y_s$ avec

$$Y_r Y_s = a_0 Y_{r+s} + a_2 Y_{r+s-2} + \ldots + a_{2s} Y_{|r-s|}. \qquad (8)$$

La valeur minimum de $k \equiv j_1 + j_2 \equiv r + s + 1$ correspond donc à $k - 1 = \Delta L$; d'après (4),

$$\Delta L \leq k - 1 \leq L + L' \quad \text{ou} \quad \Delta L \leq k - 3 \leq L + L', \quad \ldots$$

pour que l'élément de matrice

$$G_{k-1} \equiv \int \left(\Psi^*_{J'} \beta \vec{\sigma} \Psi_i \right) \vec{B}_1$$

ne soit pas nul. Il est alors de l'ordre de $(p_0 R)^{k-1}$ [12] :

$$G_{k-1} \sim (p_0 R)^{k-1}.$$

La valeur $k - 1 = \Delta L$, permet bien de vérifier (6). $k - 1$ peut être considéré comme le « moment orbital » n emporté par le champ leptonique $\vec{B}_1$ [13]. Nous considérons d'abord les valeurs de n et les ordres de grandeur des éléments de matrice pour une valeur k, donnée.

2° Un second terme $\vec{B}_2$ correspond à $l = r + 1$, $l' = s + 1$. Ce terme est plus petit que le précédent pour une même valeur de k, le moment orbital emporté par le champ leptonique étant

$$n = k + 3 = r + s + 2;$$

l'élément de matrice est alors

$$I_{k-1} \sim (p_0 R) \left(\frac{\alpha Z}{2} \right) G_{k-1} \quad [12].$$

2e *Cas.* — ψ et φ sont du même type. Le champ leptonique $\vec{B}$ emporte le moment orbital $n = k$ et l'élément de matrice est, dans ce cas,

$$G''_{k-1} \sim \frac{\alpha Z}{2} G_{k-1}.$$

3.1.2. *Termes en* $\vec{A} \equiv \psi^* \beta \vec{\alpha} \varphi$. — La probabilité de transition résultant d'un tel terme s'écrit :

$$P_{k-1} = 2\pi \mathbf{g}^2 \sum_{j_1 m_1, j_2 m_2} \left| \int \left(\Psi^*_{J'L'} \beta \vec{\alpha} \Psi_{JL} \right) \times \left(\psi^*_{j_1 m_1} \beta \vec{\alpha} \varphi_{j_2 m_2} \right) d\tau \right|^2, \qquad (9)$$

partie principale obtenue encore pour la plus petite valeur possible de $k = j_1 + j_2$. D'après (6), on a ici :

$$\Pi(\Delta L) = -\Pi(l + l'), \qquad \text{puisque} \quad \Pi\left(\beta \vec{\alpha}\right) = -1.$$

1er *cas.* — ψ et φ sont de même type; $\vec{A}$ se décompose en $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$.

1° Pour $\vec{A}_1$: $l + l' = r + s$; la valeur minimum de k, compte tenu de $D\left(\beta \vec{\alpha}\right) = 1$, correspond à $k - 1 = \Delta L - 1$.

Pour simplifier l'exposé, on considère le champ $\beta \vec{\alpha} \vec{A}_1 \simeq x \vec{A}_1$ ($\beta \vec{\alpha}$ s'appliquant ici aux nucléons)

[11] En effet, la conservation du moment angulaire total s'écrit

$$|J - J'| \leq j \leq J + J';$$

il faut tenir compte, en outre, de la conservation de la parité.

[12] p_0 est l'impulsion maxima de l'électron; α désigne la constante de structure fine; Z est relatif au noyau *final*.

[13] C'est le moment orbital *maximum* d'après (8).

qui emporte le moment orbital $n = k$; l'élément de matrice correspondant est

$$G'_{k-1} \sim \frac{v}{c} G_{k-1}.$$

2° Pour $\vec{A}_2$: $l + l' = r + s + 2$; le champ $\vec{\beta\alpha}.\vec{A}_2$ emporte le moment orbital $n = k + 2$ et l'élément de matrice est alors

$$I'_{k-1} \sim (p_0 R) \frac{\alpha Z}{2} G'_{k-1} \sim \frac{v}{c} (p_0 R) \frac{\alpha Z}{2} G_{k-1}.$$

2e *cas.* — ψ et φ sont de types différents. Ici $l + l' = k$; le champ $\vec{\beta\alpha}.\vec{A}$ emporte le moment orbital $n = k + 1$; l'élément de matrice est

$$G'''_{k-1} \sim \frac{v}{c} \frac{\alpha Z}{2} G_{k-1}.$$

TABLEAU I.

Élément de matrice.	Fonction angulaire de $\vec{B}$ ou $\vec{\beta\alpha}.\vec{A} \simeq \vec{x}.\vec{A}$.	Ordre de grandeur.
G_{k-1}......	Y_{k-1}	$(p_0 R)^{k-1}$
G''_{k-1}......	Y_k	$(p_0 R)^{k-1} \left(\frac{\alpha Z}{2}\right)$
G'_{k-1}......	Y_k	$(p_0 R)^{k-1} \left(\frac{v}{c}\right)$
G'''_{k-1}......	Y_{k+1}	$(p_0 R)^{k-1} \left(\frac{v}{c}\right) \left(\frac{\alpha Z}{2}\right)$
I_{k-1}......	Y_{k+1}	$(p_0 R)^{k-1} (p_0 R) \left(\frac{\alpha Z}{2}\right)$
I'_{k-1}......	Y_{k+2}	$(p_0 R)^{k-1} (p_0 R) \left(\frac{\alpha Z}{2}\right) \left(\frac{v}{c}\right)$

On a résumé ces résultats dans le tableau I. On classe les différents éléments de matrice suivant leur ordre de grandeur en admettant que

$$\frac{v}{c} \sim \frac{\alpha Z}{2} \sim p_0 R \quad (14)$$

et l'on constate alors que cet ordre est *toujours donné par n*, *n* étant, dans chaque cas, le moment orbital emporté par le champ des leptons $\vec{B}$ ou $\vec{\beta\alpha}.\vec{A}$. *n* doit toujours être pris égal à sa valeur minima ΔL, ce qui est, dans chaque cas, en accord [15] avec (6).

L'ordre d'interdiction est donc égal à $n = \Delta L$ (tableaux II et III).

REMARQUES. — 1. *Sur les valeurs possibles de* $k = j_1 + j_2$. — A partir des relations de conservation du moment angulaire total (2)', la valeur la plus grande μ_{max} de $|\mu| \equiv |M - M'|$ vérifie les relations suivantes :

$$|J - J'| \leq \mu_{max} \leq J + J' \quad \text{et} \quad |j_1 - j_2| \leq \mu_{max} \leq j_1 + j_2,$$

d'où :

$$k \equiv j_1 + j_2 \geq \Delta J \quad \text{et} \quad |j_1 - j_2| \leq J + J'. \quad (10)$$

De plus,

$$M - M' = M_l - M'_l + M_s - M'_s,$$

et avec notre hypothèse de couplage Russel-Saunders pour le noyau (représentation de Pauli) [16]

$$M_s - M'_s = \pm 1, 0.$$

d'où il résulte que $\Delta S = 0$ ou 1.

Par suite,

$$|M - M'| \leq |M_l - M'_l| + 1,$$
$$|M_l - M'_l| \leq |M - M'| + 1$$

et comme

$$|M_l - M'_l| \leq \Delta L.$$

« moment orbital » emporté, et

$$|M - M'| \leq j_1 + j_2,$$

il vient finalement

$$\Delta L - 1 \leq j_1 + j_2 \leq \Delta L + 1 \quad \text{pour} \quad \Delta L > 1. \quad (11)$$

2. *Sur la comparaison avec les résultats de Konopinski* [6] *et de Greuling* [7]. — En fait, l'état initial est caractérisé par les configurations (L_1, L_2, ...) et l'état final par (L'_1, L'_2, ...); on ne peut donc associer une seule valeur ΔL à une transition. On a un mélange de valeurs de ΔL, toutes de même parité d'après notre hypothèse. Ainsi, si $\Delta J = 0$ ou 1 et s'il n'y a pas de changement de parité pour la transition, la transition *réelle* est, en première approximation, une superposition des transitions *formelles* $\Delta L = 0, 2, 4, \ldots$; le terme le plus important correspond à $\Delta L = 0$, et les autres sont négligeables devant G_0 : on néglige $\Delta L = 2$ associé à $\Delta J = 0, 1$; par contre, $\Delta L = 2$ correspond à un élément de matrice prépondérant quand il est associé à $\Delta J = 2$ ou 3 (ordre d'interdiction 2). En général, pour l'ordre d'interdiction *n*, on considère seulement $\Delta J = n$, $n + 1$. On retrouve ainsi les règles classiques de Konopinski et Greuling [16] résumées dans le tableau IV.

(14) En fait, ces trois paramètres sont indépendants. En général,

$$\frac{v}{c} > p_0 R$$

et d'autant plus que E_0, énergie maxima du spectre, est plus petite; en outre,

$$\frac{\alpha Z}{2} < \frac{v}{c} \quad \text{pour} \quad A < 100,$$
$$\frac{\alpha Z}{2} > \frac{v}{c} \quad \text{pour} \quad A > 100 \text{ environ.}$$

(15) Ceci résulte de notre hypothèse sur la parité (Art. I, § 2.3.3.). Si elle n'était pas vérifiée, il faudrait prendre $n = \Delta L + 1$.

(16) $\vec{\beta\sigma}$ ayant le caractère d'un vecteur dans « l'espace des spins ».

(17) Ces auteurs n'avaient pas considéré l'hypothèse plus précise où ΔL est défini et n'avaient donc pas considéré la possibilité $\Delta L = n$, $\Delta J < n - 1$. Les types $\Delta J = n$, $\Delta J = n + 1$, avec l'ordre d'interdiction n [$\Pi\Pi' = (-1)^n$] correspondent aux types classiques : on obtient dans ce cas les mêmes probabilités de transitions que Greuling.

TABLEAU II.

ΔL.	ΔJ.	k.	Probabilité.
n	$0, 1, \ldots, n-1$	$n-1, n, n+1$	$\lvert G'''_{n-2}+I_{n-2}\rvert^2+\lvert G''_{n-1}+G'_{n-1}\rvert^2+\lvert G_n\rvert^2$
	n	$n, n+1$	$\lvert G''_{n-1}+G'_{n-1}\rvert^2+\lvert G_n\rvert^2$
	$n+1$	$n+1$	$\lvert G_n\rvert^2$

TABLEAU III.

ΔL.	ΔJ.	Probabilité.	k.
0	0, 1	$\lvert G_0\rvert^2$	1
1	0, 1	$\lvert G''_0+G'_0\rvert^2+\lvert G_1\rvert^2$	1, 2
	2	$\lvert G_1\rvert^2$	2
2	0, 1,	$\lvert G'''_0+I_0\rvert^2+\lvert G''_1+G'_1\rvert^2+\lvert G_2\rvert^2$	1, 2, 3
	2	$\lvert G''_1+G'_1\rvert^2+\lvert G_2\rvert^2$	2, 3
	3	$\lvert G_2\rvert^2$	3
3	0, 1, 2	$\lvert G'''_1+I_1\rvert^2+\lvert G''_2+G'_2\rvert^2+\lvert G_3\rvert^2$	2, 3, 4
	3	$\lvert G''_2+G'_2\rvert^2+\lvert G_3\rvert^2$	3, 4
	4	$\lvert G_3\rvert^2$	4

TABLEAU IV.

Ordre d'interdiction.	Changement de parité.	ΔJ.	Probabilité.
0	non	0, 1	$\lvert G_0\rvert^2$
1	oui	0, 1	$\lvert G''_0+G'_0\rvert^2+\lvert G_1\rvert^2$
		2	$\lvert G_1\rvert^2$
2	non	2	$\lvert G''_1+G'_1\rvert^2+\lvert G_2\rvert^2$
		3	$\lvert G_2\rvert^2$
3	oui	3	$\lvert G''_2+G'_2\rvert^2+\lvert G_3\rvert^2$
		4	$\lvert G_3\rvert^2$

4. **Probabilités des transitions β : formules.**

— Les formules donnant les probabilités des transitions permises et interdites ont été longuement développées par Konopinski [6], Greuling [7] à l'aide de la méthode tensorielle. Marshak [3] a introduit la « méthode des harmoniques sphériques », qui est développée dans ce Mémoire, mais ses calculs ne sont pas complets et renferment des erreurs; en outre, ces formules rectifiées ne peuvent directement être utilisées pour notre étude, puisqu'elles ne tiennent pas compte du nombre quantique L.

On a donc calculé les formules de probabilité des transitions β en fonction de ΔL et ΔJ dans le cas de l'émission β et de la capture K; on laisse de côté la capture d'électrons d'ordre supérieur (L, M, ...) dont les probabilités dépendent principalement des fonctions propres des états stationnaires des électrons atomiques et qui interviennent peu dans la comparaison avec les structures nucléaires. Les formules des transitions β sont indiquées pour l'émission β^-, celles pour l'émission β^+ s'obtenant en changeant (18) Z en $-Z$.

4.1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS. — Pour toute particule, on peut écrire l'égalité suivante :

$$E^2 = M^2 + p^2,$$

E étant l'énergie totale de la particule, M sa masse au repos en unités d'énergie, p sa quantité de mouvement (multipliée par c). Avec les unités relativistes choisies, on a pour l'électron $\varepsilon^2 = 1 + p^2$, et pour le neutrino $\varepsilon_\nu = q$ (on prend sa masse au repos $\mu = 0$).

L'énergie disponible dans une transition β est ε_0; $(\varepsilon_0 - 1)$ est alors l'énergie cinétique maximum de l'électron émis; $q = \varepsilon_0 + \varepsilon_k$ est l'énergie emportée par le neutrino dans la capture K, $q = \varepsilon_0 - \varepsilon$, pour l'émission β.

Dans ce qui suit, on pose

$$\gamma_r \equiv \sqrt{(r+1)^2 - \alpha^2 Z^2},$$

où r est l'entier $j_1 - \frac{1}{2}$; lorsque $\alpha^2 Z^2 \ll 1$, $\gamma_r \simeq r+1$, F_r est un facteur de correction coulombienne tel que $F_r = 1$ quand $Z = 0$

$$F_r \equiv \left[\frac{(2r+2)!}{r!}\right]^2 (2pR)^{2\gamma_r - 2r - 2}\, e^{\frac{\pi\alpha Z\varepsilon}{p}} \left|\frac{\Gamma\left(\gamma_r + i\alpha Z\dfrac{\varepsilon}{p}\right)}{\Gamma(2\gamma_r+1)}\right|^2,$$

on pose

$$(2r+1)!! \equiv 1.\ 3.\ 5.\ \ldots.\ (2r+1).$$

Dans la capture K, les valeurs des fonctions propres radiales f, g des électrons atomiques dépendent des méthodes utilisées pour les calculer; la plus simple est celle de Slater [8]; une meilleure approximation est obtenue en tenant compte de l'effet des autres électrons atomiques sur l'électron considéré, suivant les méthodes de Hartree [9]. Les valeurs de f_K, g_K ont été données dans [1] et [4].

4.2. FORMULES GÉNÉRALES. — 4.2.1. *Transitions β d'ordre n avec $\Delta J = n + 1$.* — Ce type de transition comprend les transitions permises $\Delta L = 0$, $\Delta J = 1$; le cas $\Delta L = \Delta J = 0$ relève du même calcul [4]. Dans ce cas, la probabilité de transition ne dépend pas de l'interaction choisie; et sa partie principale est la même, que ΔL soit défini ou non.

(18) D'après la théorie de Dirac, la création d'un positon est identique à l'annihilation d'un électron négatif à énergie négative

$$\psi^*_+(e^+) \equiv C\psi_-(e^-) \quad \text{ou encore} \quad \psi_+(e^+) \equiv C^*\psi^*_-(e^-)$$

et l'on pose C^* de façon que le passage de $\psi_+(e^+)$ à $\psi_-(e^-)$ revienne au changement de Z en $-Z$; C est alors égal à la matrice $i\beta\alpha_2$.

Probabilités des transitions β.

On pose pour $J \geq J'$:

$$P_\varepsilon \equiv \frac{\mathbf{g}^2}{2\pi^3} |M_n|^2 \varepsilon p q^2 P_\beta \text{ : Émission } \begin{cases} \beta^- Z > 0 \\ \beta^+ Z < 0 \end{cases} \qquad (|M_n|^2 \text{ est calculé avec } M = J);$$

$$P_K \equiv \frac{\mathbf{g}^2}{4\pi^2} |M_n|^2 P_K \text{ : Capture } K \qquad \text{Si } J < J', \text{ multiplier par } \frac{2J'+1}{2J+1}.$$

Tableau V. — $\Delta L = n$, $\Delta J = n + 1$.

ΔL.	ΔJ.	$\vert M_n\vert^2$.	P_β (1).	P_K (2).
0....	0, 1	$\langle\vert\beta\vec{\sigma} Y_{00}\vert\rangle^2$	$\frac{1+\gamma_0}{2} F_0$ (formule de Fermi)	$g_K^2 q^2$ (formule de Möller)
1....	1	$\langle\vert\beta\vec{\sigma} Y_1^{-1}\vert\rangle^2$	$\left(\frac{1+\gamma_0}{2} F_0 q_2 + \frac{2+\gamma_1}{4} F_1 p^2\right) \frac{R^2}{9}$	$g_K^2 q^4 \frac{R^2}{9}$
2....	3	$\langle\vert\beta\vec{\sigma} Y_2^{-2}\vert\rangle^2$	$\left(\frac{1+\gamma_0}{2} F_0 q^4 + \frac{10}{3}\frac{2+\gamma_1}{4} F_1 q^2 p^2 + \frac{3+\gamma_2}{6} F_2 p^4\right) \frac{R^4}{225}$	$g_K^2 q^6 \frac{R^4}{225}$
3....	4	$\langle\vert\beta\vec{\sigma} Y_3^{-3}\vert\rangle^2$	$\left(\frac{1+\gamma_0}{2} F_0 q^6 + 7\frac{2+\gamma_1}{4} F_1 q^4 p^2 + 7\frac{3+\gamma_2}{6} F_2 q^2 p^4 + \frac{4+\gamma_3}{8} \Gamma_3 p^6\right) \frac{R^6}{(105)^2}$	$g_K^2 q^8 \frac{R^6}{(105)^2}$

(1) Certains auteurs prennent $\gamma_r \simeq r + 1$, $F_r \simeq F_0$. Ceci est justifié pour Z petit et en négligeant la partie très molle du spectre. On obtient alors les facteurs correctifs suivants, qui interviennent daus la forme des spectres β :

Pour $\Delta J = 2$, on a : $q^2 + p^2$ (désigné parfois par α);

Pour $\Delta J = 3$, on a : $q^4 + \frac{10}{3} q^2 p^2 + p^4$ (désigné parfois par D_2);

Pour $\Delta J = 4$, on a : $q^6 + 7 q^4 p^2 + 7 q^2 p^4 + p^6$.

(2) Dans l'approximation de Slater,

$$g_K^2 \simeq \frac{1+\gamma_0'}{2} \frac{1}{\Gamma(2\gamma_0'+1)} (2\alpha Z_K)^3 (2\alpha Z_K R)^{2\gamma_0'-2}, \qquad \text{avec } Z_K = Z - 0{,}3 \text{ et } \gamma_0' = \sqrt{1 - \alpha^2 Z_K^2}.$$

La partie principale est donnée par l'opérateur $\beta\vec{\sigma}$ et est associée à des harmoniques sphériques en Y_n. On effectue donc le calcul pour $\Omega = \beta\vec{\sigma}$ et $j_1 + j_2 = n + 1$. $\sum_{M'}$ peut toujours se ramener au seul terme $\Delta M = n + 1$ correspondant à la transition

$$(JLM = J) \rightarrow (J'L'M' = J');$$

l'élément de matrice nucléaire M_n est unique [19]

$$|M_n|^2 \equiv \langle|\beta\sigma_- Y_n^{-n}|\rangle^2$$

$\sum_{m_1 m_2}$ se réduit également au seul terme $m_1 = j_1$, $m_2 = j_2$ et l'on prend les termes correspondant à $j_1 + j_2 = n + 1$, c'est-à-dire encore à $r + s = n$; on obtient les expressions générales suivantes :

Pour l'émission β :

$$P = \frac{\mathbf{g}^2}{2\pi^3} |M_n|^2 \frac{(2n+1)!}{[(2n+1)!!]^2} \varepsilon p q^2 \times \sum_{r+s=n} \frac{(pR)^{2r}}{(2r+1)!} \frac{(qR)^{2s}}{(2s+1)!} \frac{\gamma_r + r + 1}{2r+2} F_r; \quad (12)$$

Pour la capture K :

$$P \simeq \frac{\mathbf{g}^2}{4\pi^2} |M_n|^2 \frac{1}{[(2n+1)!!]^2} q^2 (qR)^{2n} g_K^2. \quad (13)$$

Remarquons que dans le rapport $\frac{P_K}{P_+}$, non seulement la constante de Fermi g disparaît, mais encore l'élément de matrice $|M_n|^2$ qui est unique et le même dans les deux probabilités de transition. Par suite, la mesure de ce rapport constitue un bon test pour la théorie.

On a indiqué dans le tableau V les formules pratiques pour le cas de transitions permises $\Delta L = 0$, $\Delta J = 0{,}1$; et pour les cas $\Delta L = 1$, $\Delta J = 2$; $\Delta L = 2$, $\Delta J = 3$ et $\Delta L = 3$, $\Delta J = 4$; c'est-à-dire les cas classiques : $\Delta J = 0, 1$, non; $\Delta J = 2$, oui; $\Delta J = 3$, non; $\Delta J = 4$, oui.

4.2.2. — *Transitions* β *d'ordre* $\Delta L = n$ *avec* $\Delta J = n$. — La probabilité de transition dépend de l'interaction choisie (on donnera seulement les formules pour l'interaction T) et la probabilité a la même partie principale, que ΔL soit défini ou non.

La partie principale est donnée par les opérateurs $\beta\vec{\sigma}$ et $\beta\vec{\alpha}$, $|G''_{n-1} + G'_{n-1}|^2$ et correspond

$$|M_n|^2 = \langle|\beta\vec{\sigma} Y_n^{-n}|\rangle^2 = \langle|\beta\sigma_- Y_n^{-n}|\rangle^2 + \langle|\beta\sigma_+ Y_n^{-n}|\rangle^2 + \langle|\beta\sigma_z Y_n^{-n}|\rangle^2,$$

le premier terme seul en $\beta\sigma_-$ correspondant à $\Delta M = n + 1$, étant différent de zéro.

(19) On pose

$$|M_n|^2 = \langle|\beta\sigma_- Y_n^{-n}|\rangle^2 = \left|\int (\Psi_{J'}^{M'})^* \frac{\beta\sigma_1 - i\sigma_2}{\sqrt{2}} \frac{Y_n^{-n}}{Y_{00}} \Psi_J^M \, d\tau\right|^2.$$

On peut écrire sous une forme plus symétrique

à $j_1+j_2=n$; on peut aussi considérer un terme correctif [20] en $\beta\vec{\sigma}$, $|G_n|^2$, correspondant à

$$j_1+j_2=n+1.$$

Le terme principal G''_{n-1} correspond à $\beta\vec{\sigma}$ et est associé à des harmoniques sphériques en Y_n; tandis que G'_{n-1} correspond à $\beta\vec{\alpha}$.

Termes principaux $(j_1+j_2=n)$. — $\sum_{M'}$ peut se ramener pour chaque élément G''_{n-1}, G'_{n-1} au seul terme [21]

$$\Delta M = n, \qquad (JLM=J)\to(J'L'M'=J');$$

les éléments de matrice nucléaire associés à la partie principale sont [22] :

Pour la partie en $\beta\vec{\sigma}$:

$$|M_n|^2 \equiv \left\langle \left| \beta(\vec{\sigma}\wedge\vec{r})_- Y_{n-1}^{-(n-1)} \right| \right\rangle^2; \tag{14}$$

Pour la partie en $\beta\vec{\alpha}$:

$$|M'_n|^2 \equiv \langle |\beta\alpha_- Y_{n-1}^{-(n-1)}|\rangle^2, \quad \text{avec} \quad \frac{|M'_n|^2}{|M_n|^2} \simeq \left(\frac{v}{c}\right)^2; \tag{15}$$

Pour le terme croisé :

$$N^2 \equiv M_n(M'_n)^* + c.c. \tag{16}$$

On obtient finalement les expressions générales suivantes correspondant à $j_1+j_2=n$, c'est-à-dire à $r+s=n-1$:

$$P \cong \frac{\mathbf{g}^2}{4\pi^2}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}q^2 \sum_{r+s=n-1}\frac{(2r+1)!}{(r!)^2}\frac{(2qR)^{2s}}{(2s+1)!} \times [|M'_n|^2 C'_r + |M_n|^2 C_r + N^2 D_r] \tag{17}$$

avec

$$C'_r \equiv g_r^2 + f_{-r-2}^2,$$

$$C_r \equiv f_r^2 + g_{-r-2}^2 + \frac{q^2R^2}{(2s+3)^2}(g_r^2+f_{-r-2}^2) + \frac{2qR}{2s+3}(f_{-r-2}g_{-r-2} - f_r g_r),$$

$$D_r \equiv (f_{-r-2}g_{-r-2} - f_r g_r) + \frac{qR}{2s+3}(g_r^2 + f_{-r-2}^2).$$

[20]

$$|G''_{n-1} + G'_{n-1}|^2 \simeq \left(\frac{v}{c} \mp \frac{\alpha Z}{2}\right)^2 (p_0R)^{2n-2} \quad \text{et} \quad |G_n|^2 \simeq (p_0R)^{2n}$$

et l'on a

$$\left(\frac{v}{c} \pm \frac{\alpha Z}{2}\right)^2 \gg (p_0R)^2,$$

sauf pour les grandes valeurs de ε_0 avec Z petit. Ce terme correctif a été calculé par R. Nataf [1], p. 83.

[21] On ne considère pas le type $\Delta J = 0$ avec changement de parité $\Delta L = 1$, la réduction à $\Delta M = n$ supposant $J \neq J'$. Le cas pratique $\Delta J = 0$, $\Delta L = 1$ est indiqué tableau VI.

[22] $(\vec{\sigma}\wedge\vec{r}) = \sigma_+ Z - \sigma_z X$; $\vec{r}$ est un vecteur unitaire.

Pour $g_r^2 + f_{-r-2}^2$, on peut prendre seulement le 1er terme du développment en pR

$$g_r^2 + f_{-r-2}^2 = \frac{2}{\pi}\frac{\gamma_r + r + 1}{2r+2}\left[\frac{r!}{(2r+1)!}\right]^2 \varepsilon p(2pR)^{2r}F_r. \tag{18}$$

Pour $f_r^2 + g_{-r-2}^2$, $f_{-r-2}g_{-r-2} - f_r g_r$, il faut s'arrêter plus loin, le 1er terme étant souvent du même ordre que les deux suivants :

$$f_r^2 + g_{-r-2}^2 = \frac{2p}{\pi}\varepsilon(pR)^{2r}\frac{F_r}{[(2r+1)!!]^2} \times \left[\frac{r+1-\gamma_r}{2r+2} + p^2R^2\frac{\gamma_r(\gamma_r - r)}{(r+1)(2\gamma_r+1)^2} \times \left(1 - \alpha^2Z^2\frac{4\gamma_r+3}{\gamma_r(\gamma_r+1)}\right) \times \frac{2\gamma_r - 2r - 1}{(r+1)(2\gamma_r+1)}\alpha ZR\frac{p^2}{\varepsilon}\right], \tag{19}$$

$$f_{-r-2}g_{-r-2} - f_r g_r = \frac{2p}{\pi}\varepsilon(pR)^{2r}\frac{F_r}{[(2r+1)!!]^2} \times \left[\frac{\alpha Z}{2r+2} + R\frac{p^2}{\varepsilon}\frac{\gamma_r}{(r+1)(2\gamma_r+1)} - \frac{4\alpha ZR\varepsilon}{2\gamma_r+1}\right]. \tag{20}$$

Ces expressions ont été utilisées dans les tableaux V à VII.

Pour la capture K, (17) s'écrit :

$$P \cong \frac{\mathbf{g}^2}{4\pi^2}\frac{1}{[(2n-1)!!]^2}q^2(qR)^{2n-2} \times \left[|M_n|^2\left(\frac{qR}{2n+1}g_K - f_K\right)^2 + |M'_n|^2 g_K^2 + N^2\left(\frac{qR}{2n+1}g_K - f_K\right)g_K\right]. \tag{21}$$

Les formules pratiques sont indiquées tableau VI.

4.2.3. *Transitions* β *d'ordre* $\Delta L = n$, *avec* $\Delta J = n-1$. — Les transitions de ce type (et plus généralement $\Delta L = n$, $\Delta J \leq n-1$) n'existent que pour ΔL bien défini. La transition peut s'effectuer par les opérateurs $\beta\vec{\sigma}$ ou $\beta\vec{\alpha}$; les termes principaux correspondent à $j_1+j_2=n-1$; ce sont (tableau VII) $|G'''_{n-2} + I_{n-2}|^2$. $|I_{n-2}|^2$ correspond à l'opérateur $\beta\vec{\sigma}$: ce sont les termes en Y_n précisément négligés dans la transition $\Delta J = n-1$, $\Delta L = n-2$. L'élément de matrice nucléaire peut s'écrire, pour ce terme

$$|M_n|^2 \equiv \left\langle \left| \beta[\sigma r^2 - 2(\vec{\sigma}.\vec{r})\vec{r}]_- Y_{n-2}^{-(n-2)} \right| \right\rangle^2.$$

$|G'''_{n-2}|^2$ correspond à l'opérateur $\beta\vec{\alpha}$; l'élément de matrice nucléaire est aussi unique $(\Delta M = n-1)$ et peut s'écrire

$$|M'_n|^2 = \left\langle \left| \beta(\vec{\alpha}\wedge\vec{r})_- Y_{n-2}^{-(n-2)} \right| \right\rangle^2.$$

La partie principale de la probabilité de transition est

$$P \simeq \frac{\mathbf{g}^2}{4\pi^2}\frac{[(n-2)!]^2}{(2n-3)!}q^2 \sum_{r+s=n-2}\frac{(2r+1)!}{(r!)^2}\frac{(2qR)^{2s}}{(2s+1)!} \times [|M'|^2 A'_r + |M|^2 A_r + N^2 B_r], \tag{22}$$

TABLEAU VI. — $\Delta L = \Delta J = n$.

ΔL.	ΔJ.	$\lvert M\rvert^2$.	P_β (²).	P_K.
1 (¹)...	1	$\langle \lvert \beta \vec{\sigma} \wedge \vec{r} Y_{00} \rvert \rangle^2$	$F_0\left(\varphi_0^2 + 2q\frac{R}{3}\varphi'_0 + \frac{1+\gamma_0}{2}q^2\frac{R^2}{9}\right)$	$\left(g_K q\frac{R}{3} - f_K\right)^2 q^2$
		$\langle \lvert \beta \vec{\alpha} Y_{00} \rvert \rangle^2$	$F_0\,\frac{1+\gamma_0}{2}$	$g_K^2 q^2$
		$N^2 \equiv M_\sigma M_\alpha^* + c.c$	$F_0\left(\varphi'_0 + \frac{1+\gamma_0}{2}q\frac{R}{3}\right)$	$\left(g_K q\frac{R}{3} - f_K\right) g_K q^2$
2......	2	$\langle \lvert \beta \vec{\sigma} \wedge \vec{r} Y_1^{-1} \rvert \rangle^2$	$F_0\left(\varphi_0^2 + 2q\frac{R}{5}\varphi'_0 + \frac{1+\gamma_0}{2}q^2\frac{R^2}{25}\right)q^2\frac{R^2}{9} + F_1\left(\varphi_1^2 + 2q\frac{R}{3}\varphi'_1 + \frac{2+\gamma_1}{4}q^2\frac{R^2}{9}\right)p^2\frac{R^2}{9}$	$\left(g_K q\frac{R}{5} - f_K\right)^2 q^4\frac{R^2}{9}$
		$\langle \lvert \beta \vec{\alpha} Y_1^{-1} \rvert \rangle^2$	$F_0\left(\frac{1+\gamma_0}{2}q^2 + F_1\frac{2+\gamma_1}{4}p^2\right)\frac{R^2}{9}$	$g_K^2 q^4\frac{R^2}{9}$
		N^2	$F_0\left(\varphi'_0 + \frac{1+\gamma_0}{2}q\frac{R}{5}\right)q^2\frac{R^2}{9} + F_1\left(\varphi'_1 + \frac{2+\gamma_1}{4}q\frac{R}{3}\right)p^2\frac{R^2}{9}$	$\left(g_K q\frac{R}{5} - f_K\right) g_K q^4\frac{R^2}{9}$

(¹) Pour $\Delta L = 1$, $\Delta J = 0$, seul diffère :

$$\lvert M_n \rvert^2 \equiv \langle \lvert \beta \vec{\sigma} \wedge \vec{r} Y_{00} \rvert \rangle^2 + \langle \lvert \beta \vec{\sigma}.\vec{r} Y_{00} \rvert \rangle^2.$$

(²) On pose

$$f_n^2 + g_{-n-2}^2 \equiv 2\frac{p}{\pi}\varepsilon(pR)^{2n}\frac{F_n}{(2n+1!!)^2}\varphi_n^2,$$

avec

$$\varphi_0^2 \equiv \frac{1-\gamma_0}{2} + p^2R^2\frac{\gamma_0^2}{(2\gamma_0+1)^2}\left[1 - \alpha^2Z^2\frac{4\gamma_0+3}{\gamma_0(1+\gamma_0)}\right] + \frac{2\gamma_0-1}{2\gamma_0+1}\alpha ZR\frac{p^2}{\varepsilon},$$

$$\varphi_1^2 \equiv \frac{2-\gamma_1}{4} + p^2R^2\frac{\gamma_1(\gamma_1-1)}{2(2\gamma_1+1)^2}\left[1 - \alpha^2Z^2\frac{4\gamma_1+3}{\gamma_1(1+\gamma_1)}\right] + \frac{2\gamma_1-3}{2(2\gamma_1+1)}\alpha ZR\frac{p^2}{\varepsilon}$$

et

$$f_{-n-2}g_{-n-2} - f_n g_n \equiv 2\frac{p}{\pi}\varepsilon(pR)^{2n}\frac{F_n}{(2n+1!!)^2}\varphi'_n,$$

avec

$$\varphi'_0 \equiv \frac{\alpha Z}{2} + R\frac{p^2}{\varepsilon}\frac{\gamma_0}{2\gamma_0+1} - 4\frac{\alpha ZR\varepsilon}{2\gamma_0+1}, \qquad \varphi'_1 \equiv \frac{\alpha Z}{4} + R\frac{p^2}{\varepsilon}\frac{\gamma_1}{2(2\gamma_1+1)} - 4\frac{\alpha ZR\varepsilon}{2\gamma_1+1}.$$

TABLEAU VII. — $\Delta L = n$, $\Delta J = n - 1$.

ΔL.	ΔJ.	$\lvert M\rvert^2$.	P_β (²).	P_K.
2.........	1	$\langle \lvert \beta[\vec{\sigma} r^2 - 2(\vec{\sigma}.\vec{r}).\vec{r}]Y_{00} \rvert \rangle^2$	$F_0 q^2\frac{R^2}{9}\varphi_0^2$	$f_K^2 q^4\frac{R^2}{9}$
		$\langle \lvert \beta \vec{\alpha} \wedge \vec{r}.Y_{00} \rvert \rangle^2$	$F_0\left(\varphi_0^2 + 2q\frac{R}{3}\varphi'_0 + \frac{1+\gamma_0}{2}q^2\frac{R^2}{9}\right)$	$\left(f_K - g_K q\frac{R}{3}\right)q^2$
		N^2	$F_0\left(q\frac{R}{3}\varphi'_0 + \varphi_0^2\right)q\frac{R}{3}$	$\left(f_K - g_K q\frac{R}{3}\right)f_K q^3\frac{R}{3}$

avec

$$A'_r \equiv f_r^2 + g_{-r-2}^2 + \frac{q^2R^2}{(2s+3)^2}(g_r^2 + f_{-r-2}^2) + \frac{2qR}{2s+3}(f_{-r-2}g_{-r-2} - f_r g_r) \qquad (A'_r \equiv C_r),$$

$$A_r \equiv \frac{q^2R^2}{(2s+3)^2}(f_r^2 + g_{-r-2}^2),$$

$$B_r \equiv \frac{qR}{2s+3}(f_r^2 + g_{-r-2}^2) + \frac{q^2R^2}{(2s+3)^2}(f_{-r-2}g_{-r-2} - f_r g_r).$$

Termes correctifs. — Les termes principaux précédents ont l'ordre de grandeur

$$(p_0R)^{2n-4}\left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2\left(\frac{v}{c} + p_0R\right)^2;$$

les termes suivants :

$$\lvert G''_{n-1} + G'_{n-1} \rvert^2 \simeq (p_0R)^{2n-2}\left(\frac{\alpha Z}{2} + \frac{v}{c}\right)$$

et

$$\lvert G_n \rvert^2 \simeq (p_0R)^{2n};$$

correspondent à $j_1 + j_2 = n$ et $n + 1$, mais sont négligeables dans les cas que nous étudierons.

4.2.4. *Transition* $0 \to 0$. — Dans tout ce qui précède on a laissé de côté ces transitions qui sont interdites, avec l'ordre d'interdiction 1 ou 2 pour l'interaction T.

Note sur épreuves. — Dans une Note aux *Comptes rendus* récente, citée plus haut (⁶), nous avons montré que le couplage nucléon-lepton serait un mélange d'interaction H_t du type Gamow-Teller (T ou A) et H_f du type Fermi (S ou V). La contribution de H_t et H_f dans les probabilités de transition β serait environ 80 et 20 pour 100. Un tel mélange influencera essentiellement les transitions ΔJ-ΔL au point de vue de la forme du spectre β et du rapport d'embranchement capture K-emmission β^+; on étudiera ultérieurement cet effet et l'importance des termes croisés.

Nous avons reçu, après ce travail, une Note de O. Kofoed-Hansen et Aage Ninther (Institut de Physique théorique, Copenhague) qui ont fait une étude analogue et arrivent à un résultat en accord avec le nôtre : 25 ± 4 pour 100 de H_f.

Manuscrit reçu le 15 novembre 1951.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Nataf R. — *Thèse*, Paris, 1951, chap. III.
[2] Fierz. — *Z. Physik*, 1937, **104**, 533; Tolhœk H. A. — *Thèse*, Amsterdam, 1951; *Physica*, 1950, **16**, 456 et 1951, **17**.
[3] Marshak R. E. — *Phys. Rev.*, 1942, **61**, 431.
[4] Bouchez R., de Groot S. R., Nataf R. et Tolhœk H. A. — *J. Physique Rad.*, 1950, **11**, 105.
[5] de Groot S. R. et Tolhœk H. A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 1794; *Physica*, 1949, **15**, 833.
[6] Konopinski E. J. — *Rev. Mod. Physics*, 1943, **15**, 209.
[7] Greuling E. — *Phys. Rev.*, 1942, **61**, 568.
[8] Slater. — *Phys. Rev.*, 1930, **36**, 57.
[9] Hartree. — *Proc. roy. Soc.* London, 1935, **149**, 210 et **150**, 9.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 13, AVRIL 1952, PAGE 199.

THÉORIE DES GAZ ET ÉQUATION D'ÉTAT. XII. COMPRESSIBILITÉ ET LIQUÉFACTION DE L'ARGON

Par Jacques DUCLAUX.

Sommaire. — La théorie des gaz, fondée sur leur association progressive, d'abord appliquée à l'azote et à l'oxygène, a été étendue à l'argon. Elle concorde avec l'expérience entre des limites très étendues. La considération de la courbe de condensation, établie d'après la compressibilité, permet de calculer *a priori* la pression de vapeur saturante à toutes les températures, en l'absence de toute mesure faite sur le liquide.

1. Dans deux Mémoires précédents [1], [2], la théorie de la condensation progressive des gaz a été appliquée à l'oxygène et à l'azote et l'accord avec l'expérience s'est montré très bon. Il n'était pas sûr que les mêmes considérations s'appliqueraient à l'argon, gaz monoatomique. Cependant, le calcul a donné des résultats aussi favorables. Les chiffres expérimentaux sont ceux de Kamerlingh Onnes et Crommelin [3].

Argon.

Valeurs de PV à —102°,51.

P (atm.)	PV observé.	PV calculé.	Différence×10⁴
14,86	0,5813	0,5813	0
19,79	0,5642	0,5643	+ 1
32,39	0,5205	0,5200	— 5
40,98	0,4878	0,4876	— 2
45,09	0,4706	0,4709	+ 3
51,40	0,4435	0,4441	+ 6
56,88	0,4193	0,4193	0
62,24	0,3939	0,3930	— 9

Comme précédemment, je donnerai d'abord les résultats en détail pour une température très basse, voisine de la température critique; ce sont les conditions dans lesquelles on peut le mieux juger de la valeur d'une théorie.

L'erreur moyenne est 0,00035 ou environ 1/1000ᵉ de la quantité mesurée. Je rappelle que la méthode de calcul peut introduire une erreur de 0,0002; le chiffre 0,00035 est donc un maximum.

Pour les températures supérieures, les écarts moyens entre la théorie et l'expérience sont :

+ 20°,39	0,0009
0	0,0005
— 57,72	0,0002
— 87,05	0,0003

c'est-à-dire toujours du même ordre. Pour les températures plus basses (— 116°,62 et — 121°,21), les résultats peuvent être résumés ainsi : tant que le volume du gaz reste supérieur à 1,5 fois le volume critique, l'erreur reste la même :

0,0005 à — 116° et 0,0009 à — 121°,

mais pour des volumes inférieurs, la théorie donne des volumes trop petits, l'erreur la plus grande sur PV étant 0,007 à — 116° et 0,004 à — 121° sous 51 atm, pression supérieure à la pression critique.

Il faut noter que ces nombres sont très douteux. A 121°,2, c'est-à-dire à 1°,2 du point critique et pour des pressions voisines de la pression critique, la compressibilité du gaz est presque infinie. Quand la pression passe de 49,87 à 50,89 atm, le volume diminue de 0,00427 à 0,00300, c'est-à-dire presque de 1/3. Pour pouvoir garantir une erreur relative sur V de moins de 2/100e, ordre de grandeur des écarts que nous constatons, il faut mesurer la pression à mieux que 1/1000e près, en supposant que les mesures de volume et de températures soient rigoureuses. Il est douteux que cette exactitude soit atteinte. Il n'y a pas de doute que, au voisinage immédiat du point critique, la théorie est en défaut pour l'argon, comme elle l'était pour l'azote et l'oxygène, et dans le même sens. Mais il est impossible de savoir de combien. En admettant pour exacts les chiffres donnés plus haut, nous voyons qu'à — 121°, l'écart (0,004) est 28 fois plus petit que celui auquel conduit la formule de van der Waals. Nous avions déjà trouvé (*loc. cit.*) :

Pour l'azote	un écart 26 fois plus petit	
» l'oxygène	» 46	»

Le progrès est donc toujours à peu près le même.

Les calculs ont été conduits en admettant pour le covolume (unités Amagat) la valeur 0,00165 qui a paru convenir. Il est possible qu'une autre valeur donne des écarts plus faibles encore. Comme nous le verrons dans la suite, cette question n'a pas d'intérêt en raison de l'incertitude des chiffres expérimentaux. Réduire les écarts de 2 ou 3 dix-millièmes n'a pas de sens si l'expérience n'atteint pas cette précision.

2. **Emploi de la courbe de condensation.** — La *courbe de condensation* a déjà été définie.

C'est une isotherme, qui représente comme l'isotherme ordinaire tous les états du gaz à une température déterminée, mais dans un système de coordonnées différent. La figure 1 en donne un exemple. Les abscisses sont le logarithme du volume de la masse gazeuse, diminué du covolume. Je rappelle que, pour abréger, j'ai appelé *gaz fictif* un gaz qui a exactement les mêmes propriétés que le gaz réel, mais dont le covolume est nul. Tous les calculs de volume (en fonction de la pression ou de la température) se font sur le gaz fictif; pour passer au gaz réel on ajoute simplement le covolume. Deux gaz réels peuvent avoir le même gaz fictif; c'est le cas, par exemple, pour l'oxygène et l'argon.

Contrairement au covolume de van der Waals, celui que nous envisageons ici est indépendant de la température aussi bien que de la pression. Nous continuons à le désigner par b. Si V_f est le volume du gaz fictif, V étant celui du gaz réel, nous avons toujours

$$V_f = V - b.$$

Les abscisses de la courbe de condensation sont évaluées dans un système d'unités quelconque et correspondent à une masse de gaz quelconque. Aucune de ces quantités n'a besoin d'être fixée.

Les ordonnées sont les valeurs du rapport $\frac{PV_f}{RT}$, P étant la pression en atmosphères. A la seule condition (d'ailleurs évidente) que le volume réel et le covolume soient évalués dans la même unité, ce quotient est un nombre sans dimension.

L'intérêt de la courbe de condensation est qu'elle révèle une propriété remarquable des gaz, qui a déjà été signalée dans un Mémoire antérieur et qui simplifie beaucoup leur étude [1].

Avec le système de coordonnées classique (abscisses volume, ordonnées pression), toutes les isothermes ont une forme différente, et le tracé de l'une ne peut se déduire simplement du tracé de l'autre. Au contraire, toutes les courbes de condensation pour toutes les températures se déduisent les unes des autres par une *dilatation* proportionnelle des abscisses et une *translation* générale suivant l'axe des abscisses. Il suffit, pour passer d'une température à l'autre, de multiplier toutes les abscisses par un même nombre et d'ajouter ensuite aux chiffres ainsi obtenus un nombre constant. Cette loi, que nous appellerons la *loi de similitude*, a déjà été établie pour l'oxygène et l'azote; elle reproduit l'expérience sans aucune erreur supérieure aux incertitudes expérimentales. Elle est exacte aussi pour l'argon. La transformation a faire subir aux courbes pour les ramener les unes aux autres est si simple qu'on peut dire qu'un gaz *n'a qu'une seule isotherme.*

C'est cette propriété qui nous a permis de ne pas préciser, dans le tracé de la courbe de condensation, la quantité de gaz employée, ni le système d'unités. En effet, du moment que les abscisses sont des logarithmes de volume, un changement de masse gazeuse

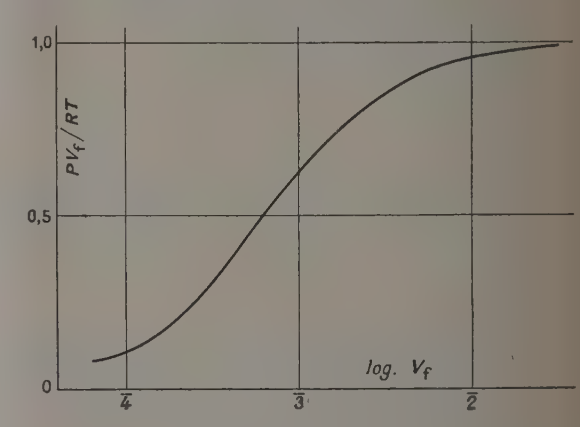


Fig. 1. — Courbe de condensation (courbe de base; argon à — 106°).

ou d'unité se traduit par une translation horizontale qui ne change pas la forme de la courbe, et qui vient seulement se superposer à celle que nous devons lui faire subir pour passer d'une température à l'autre.

De même, la température à laquelle correspond la courbe de condensation n'a pas besoin d'être précisée, parce que pour chaque température réelle il faudra de toute manière effectuer une dilatation proportionnelle. Nous pouvons la tracer d'une manière absolue, comme si elle était invariante; à chaque masse gazeuse et à chaque température correspondront une certaine dilatation et une certaine translation. Tous les calculs sont extrêmement simples; une multiplication par un nombre constant et l'addition d'un nombre constant. Un exemple de calcul a été donné au Mémoire [1] paragraphe 8.

La théorie de la condensation progressive permet de calculer complètement *a priori* la courbe de condensation qui, servant au tracé de toutes les autres, sera appelée la *courbe de base*. Elle ne dépend que d'une seule constante qui a été appelée la constante p et qui exprime la variation des constantes d'association à mesure que la condensation progresse [1]. La courbe de base que j'ai calculée s'est trouvée valable pour l'argon sans dilatation à une température de — 106° environ. J'appellerai *facteur F* le nombre par lequel il faut multiplier les abscisses pour passer à une autre température. Ses valeurs sont, par exemple :

à — 116°,6	$F = 0,9720$
— 57,7	1,0911
0	1,1580

Je désignerai par Δ la translation à faire subir aux abscisses. Les deux grandeurs F et Δ sont déterminées par comparaison avec l'expérience. La vérification de la théorie consiste en ce que, à toute température, la connaissance de la courbe de base et des nombres F et Δ suffit pour retrouver les nombres expérimentaux avec l'exactitude que nous avons constatée au début de ce Mémoire.

Courbe empirique. — Nous allons maintenant changer notre point de vue pour tirer le meilleur parti de la courbe de condensation. Nous avons vu que la courbe théorique est en défaut au voisinage immédiat du point critique, et toujours dans le même sens. Elle l'est aussi ([2], § 8) pour les faibles pressions, et ceci aussi toujours dans le même sens. Dès lors nous pouvons la corriger dans les régions où elle est imparfaite, renoncer provisoirement à sa signification théorique et la considérer comme purement empirique. C'est ce que nous ferons dans la suite de ce Mémoire. Le tracé de cette courbe empirique est un peu incertain, parce que les nombres expérimentaux sur lesquels elle s'appuie sont peu nombreux et peu sûrs. Dans toute une région, il n'est même pas certain que la courbe corrigée soit plus exacte que la courbe théorique, car il n'est pas impossible que dans cette région l'erreur expérimentale ait une allure systématique.

La courbe empirique (qui, sauf vers le point critique, ne diffère de la courbe théorique que de *moins de* 1/1000e), a été tracée pour des valeurs de ($\log V_f$) allant de 0,01 en 0,01 entre 0 et $\bar{4}$,0. Les valeurs des coordonnées de dix en dix intervalles sont données au tableau I. Une courbe serait insuffisante, car sur un tracé de 10 cm de hauteur, l'exactitude atteinte est de quelques centièmes de millimètre.

TABLEAU I. — *Argon.*

Coordonnées de quelques points de la courbe de condensation.

$\log V_f$.	$\frac{PV_f}{RT}$.	$\log V_f$.	$\frac{PV_f}{RT}$.
0,0	0,9997	2,0	0,9541
1,9	0,9997	3,9	0,9408
1,8	0,9996	3,8	0,9240
1,7	0,9995	3,7	0,9029
1,6	0,9993	3,6	0,8781
1,5	0,9991	3,5	0,8485
1,4	0,9989	3,4	0,8138
1,3	0,9986	3,3	0,7734
1,3	0,9982	3,2	0,7271
1,1	0,9978	3,1	0,6751
1,0	0,9971	3,0	0,6177
2,9	0,9962	4,9	0,5563
2,8	0,9950	4,8	0,4920
2,7	0,9934	4,7	0,4270
2,6	0,9913	4,6	0,3636
2,5	0,9884	4,5	0,3041
2,4	0,9846	4,4	0,2504
2,3	0,9797	4,3	0,2032
2,2	0,9732	4,2	0,1637
2,1	0,9648	4,1	0,1316
2,0	0,9541	4,0	0,1056
		5,9	0,0848

Bien que cette table ait été établie pour l'argon, elle est valable aussi pour l'oxygène dans des limites très étendues, et dans des limites un peu plus restreintes pour l'azote. Mais les facteurs F et Δ varient d'un gaz à l'autre.

Comparaison des résultats expérimentaux. — Pour juger de la valeur d'une théorie, il faut connaître la précision des résultats expérimentaux auxquels elle est comparée. La courbe de condensation donne un moyen très simple pour confronter les diverses mesures d'une série, ou celles de divers observateurs. J'ai fait ce travail pour les mesures de Kamerlingh Onnes et pour celles de Holborn et Otto [3]. La région comprise entre 20° et — 100° est commune aux deux séries d'expériences. Si elles concordent, en les comparant à la courbe de

base nous aurons des valeurs de F d'une part, de Δ d'autre part, qui devront s'aligner sur une courbe régulière. Les résultats sont donnés sur la figure 2 pour F et sur la figure 3 pour Δ. On voit

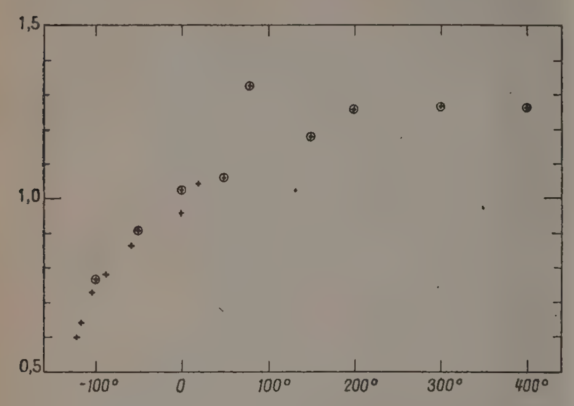


Fig. 2. — Valeurs du facteur F en fonction de la température. Les points encadrés sont ceux de Holborn.

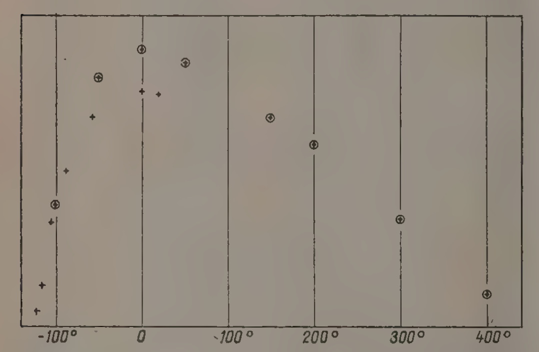


Fig. 3. — Valeurs de la translation Δ en fonction de la température. Les points encadrés sont ceux de Holborn.

que la concordance laisse beaucoup à désirer. Il est curieux que ce soit à 0° que le désaccord est le plus grand; il y a entre les deux séries une différence systématique, à peu près indépendante de la pression, qui est pour le produit PV en moyenne de 0,0045. La différence est bien moindre à — 50° et à — 100°. Le tracé d'une courbe moyenne est, par suite, un peu arbitraire. Je l'ai fait au mieux. Partant de la courbe moyenne ainsi obtenue, j'ai recalculé au moyen de la courbe de base les 124 valeurs du produit PV pour les comparer aux 124 valeurs expérimentales. L'écart moyen est 0,0007. Quelques chiffres sont manifestement aberrants, mais cinq seulement sont supérieurs à 0,002 et ils apparaissent au hasard dans les séries. Cet écart moyen doit être jugé très satisfaisant, puisqu'il s'agit de représenter par la même formule les mesures de deux observateurs employant des méthodes différentes.

Nous avons vu que les chiffres de Kamerlingh Onnes sont retrouvés par la théorie avec un écart moitié moindre; on sait que les nombres d'un expérimentateur sont toujours mieux d'accord entre eux qu'avec ceux d'un autre expérimentateur.

Le résultat principal de cette comparaison est qu'il est inutile de vouloir faire concorder la théorie avec l'expérience à mieux que 0,0005 près environ, sur la valeur de PV, et qu'un écart isolé atteignant 0,002 n'est pas significatif. Ces deux données nous serviront dans la suite.

3. **Liquéfaction.** — J'ai indiqué dans un Mémoire précédent [1] comment la courbe de condensation permettait de prévoir l'existence et la position du point critique et de calculer *a priori* la pression de vapeur saturante, par une méthode extrêmement simple, à toutes les températures. Une première application avait été faite à l'oxygène, mais avec une méthode d'extrapolation qui laissait à désirer. Une autre méthode va nous donner pour l'argon des résultats bien supérieurs.

Bien que le calcul soit très simple, il est d'un type nouveau et peut à ce titre surprendre. Je donnerai donc toutes les explications nécessaires.

La *courbe de base* nous donne pour chaque valeur du volume V_f (évalué par nécessité en unités arbitraires), la valeur du rapport sans dimension $\frac{PV_f}{RT}$,

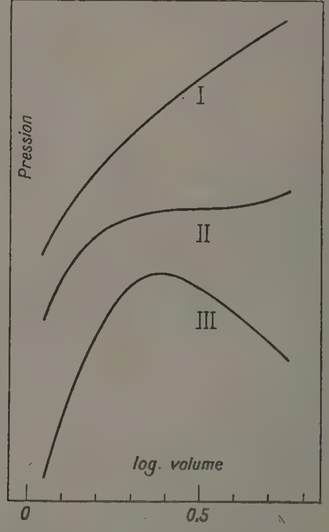


Fig. 4. — Variation de la pression en fonction du volume. I, au-dessus du point critique; II, au point critique; III, au-dessous du point critique. Échelle des ordonnées arbitraires.

d'où nous déduisons P. En faisant ce calcul pour toutes les valeurs du volume, nous constatons que la pression est indéfiniment croissante à mesure que le volume V_f (et par suite aussi le volume réel V) diminuent. Les résultats sont donnés sur la figure 4, courbe I.

Nous avons vu que la courbe de base correspond aux divers états du gaz à la température de — 106°. Donc, à cette température, la pression augmente indéfiniment par diminution du volume. En poursuivant les calculs, nous verrions qu'il en est de même *à toutes les températures supérieures*, pour lesquelles le facteur F est plus grand que l'unité. Ceci est une simple propriété géométrique de la courbe de base.

Considérons maintenant les températures inférieures. Alors nous devons nous servir d'une courbe de condensation que nous appellerons C_T et qui se déduit de la courbe de base en multipliant toutes les abscisses par le même facteur F, qui est alors plus petit que l'unité et va en décroissant toujours. Tant que ce facteur est supérieur à 0,955, la pression continue à monter indéfiniment suivant une courbe continue. Mais à 0,955, il se produit un phénomène nouveau. Pour une certaine valeur de ($\log V_f$), la courbe C_T a un point d'inflexion à tangente horizontale, c'est-à-dire que $\frac{dP}{dV_f}$ et $\frac{d^2P}{dV_f^2}$ sont tous deux nuls. Ce point est le point critique. Les chiffres sont reportés sur la figure 4, courbe II.

L'existence de ce point est une conséquence *nécessaire* de la forme de la courbe de condensation. Sa position est indépendante de la translation Δ qui ne fait qu'ajouter à tous les chiffres un nombre constant et, par suite, ne peut changer la position du maximum.

Si nous diminuons encore la valeur de F, c'est-à-dire si nous abaissons encore la température, nous avons un maximum de pression (*fig.* 4, courbe III). Le maximum est le point de liquéfaction; pour des volumes encore inférieurs, le gaz est instable et ne peut plus exister.

Ainsi, pour toutes les valeurs de F plus petites que 0,955, la courbe de base nous donne la valeur de $\frac{PV_f}{RT}$ pour laquelle la liquéfaction se produira. Ce chiffre 0,955 n'a aucune signification; il serait différent si la courbe de base avait été établie pour une autre température.

Pour pouvoir effectuer les calculs numériques nécessaires au contrôle, il faut connaître la valeur du facteur F à toutes les températures inférieures au point critique. La compressibilité à ces températures n'ayant pas été mesurée, nous ne pouvons connaître les valeurs de F que par extrapolation des chiffres obtenus à des températures plus élevées.

Il se trouve, heureusement, que cette extrapolation ne soulève pas de difficultés. La figure 5 donne les valeurs de F entre — 121° et 400°. L'incertitude du côté des hautes températures est considérable, mais cette région ne nous intéresse pas. D'ailleurs, cette incertitude serait bien diminuée par le fait que F doit tendre vers 1,37 à mesure que la température augmente, ceci étant une simple conséquence arithmétique de la manière dont a été calculée la courbe de base.

Les abscisses de la courbe 5 sont les inverses de

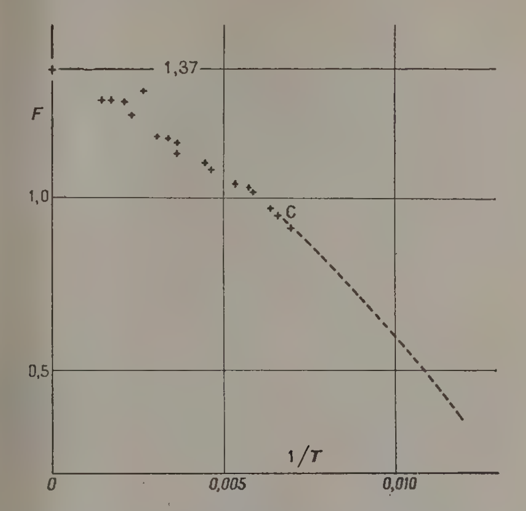


Fig. 5. — Valeurs du facteur F en fonction de $\frac{1}{T}$. La partie pointillée est extrapolée. La valeur 1,37 est théoriquement atteinte pour une température infinie.

la température absolue T. On voit que pour les basses températures les points sont presque en ligne droite. Cependant, comme F doit devenir rapidement très petit, la ligne droite doit être remplacée par une courbe à très grande courbure. La partie extrapolée est en pointillé.

Nous aurons besoin aussi des valeurs de la translation Δ. L'extrapolation est moins sûre, parce que nous ne savons rien *a priori* sur la valeur de Δ aux très basses températures. Elle est cependant possible, et d'ailleurs une erreur sur Δ est bien moins importante qu'une erreur sur F. La figure 6 montre

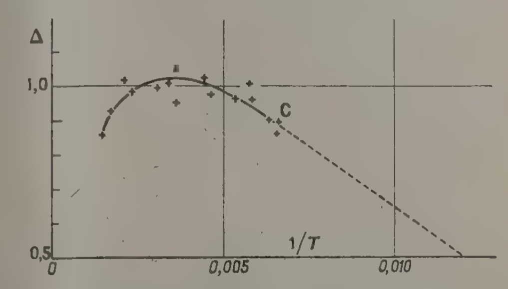


Fig. 6. — Valeurs de la translation Δ en fonction de $\frac{1}{T}$. La partie pointillée est extrapolée.

que, pour les basses températures, la variation de Δ en fonction de $\frac{1}{T}$, est presque linéaire. La partie extrapolée est en pointillé.

4. **Exemple de calcul.** — Si nous disposions pour chaque température de la courbe de condensation correspondante, tracée en unités Amagat, le calcul serait extrêmement simple, puisqu'il se réduirait à une multiplication.

Supposons pour un moment que la courbe de base soit tracée dans ces unités. Nous voulons avoir la pression de vapeur saturante à la température qui lui correspond, c'est-à-dire à peu près — 106°. Nous partons de l'identité

$$P = \frac{PV_f}{RT}\,\frac{RT}{V_f}$$

ou

$$\log P = \log\frac{PV_f}{RT} + \log RT - \log V_f.$$

Le maximum s'obtient en faisant des essais pour plusieurs valeurs du volume. Sa position nous donne immédiatement les valeurs du volume V_f et du produit $\frac{PV_f}{RT}$, d'où nous déduisons P par une simple division.

Si le facteur F n'est pas égal à 1, s'il est par exemple égal à 0,865, il faudra chercher le maximum de la fonction

$$\log\frac{PV_f}{RT} - 0,865 \log V_f.$$

Ce maximum est absolument indépendant de la translation. Mais il faut tenir compte de celle-ci pour exprimer le volume V en unités Amagat, puisque toutes les courbes sont tracées en unités arbitraires de volume.

On pourrait penser qu'il serait plus simple de les tracer directement en unités Amagat. Mais alors une courbe ne pourrait servir que pour une température et pour un gaz, tandis que la courbe de base conserve sa valeur à toute température et pour plusieurs gaz (oxygène, argon, en partie azote). En effet, le même gaz fictif peut convenir à plusieurs gaz réels. Au lieu de simplifier, le tracé en unités Amagat compliquerait les calculs au point de les rendre pratiquement impossibles.

La marche à suivre est donc la suivante. Soit la température de 134° K. La valeur de F est 0,865 et celle de Δ, 0,83. Nous cherchons sur la courbe de base rectifiée le maximum de l'expression

$$\log\frac{PV_f}{RT} - 0,865 \log V_f,$$

ou plus simplement, en appelant x et y les coordonnées, le maximum de

$$\log y - x.$$

Nous trouvons

$$\log V_f = \bar{4},415, \qquad \frac{PV_f}{RT} = 0,2579.$$

Nous multiplions le logarithme du volume par

$$-3,385 \times 0,865 = -3,101 \quad \text{ou} \quad \bar{4},899.$$

Nous ajoutons la translation et nous obteno[ns] le logarithme du volume en unités Amagat

$$\log V_f = \bar{4},899 + 0,83 = \bar{3},729, \qquad \text{d'où} \qquad V_f = 0,005[36]$$

et, comme RT est égal à 0,4909,

$$P = \frac{PV_f}{RT}\,\frac{RT}{V_f} = 0,2579\,\frac{0,4909}{0,00536} = 23,6 \text{ atm},$$

alors que le chiffre expérimental est 23,0.

Le même calcul a été fait par la même routi[ne] pour d'autres températures (1)

Température (°K).	F.	Δ.	P_{calc} (atm).	P_{obs} (atm).
143,5........	0,915	0,86	35,9	35,8
134,0........	0,865	0,83	23,6	23,0
111,9........	0,71	0,72	7,54	7,43
90,1........	0,463	0,57	1,35	1,34
87,25.......	0,415	0,54	1,00	1,00
83,93.......	0,350	0,51	0,66	0,67

Mention spéciale doit être faite du point critiqu[e]. Nous le trouvons pour une valeur de F égale à 0,9[…] et une translation 0,90. Il est un peu incertain, c[ar] la position d'un point d'inflexion sur une cour[be] est mal définie. La pression calculée est 46,4 at[m] (obs. 48,0) et le volume critique 0,00329 (obs. 0,0033[…]). La température est 151° K (obs. 150,7). L'acco[rd] est aussi bon que l'on pouvait l'espérer.

Conclusion. — Confirmant les résultats de[…] obtenus pour l'oxygène, mais avec une précisi[on] bien plus grande, nous voyons que nous pouvo[ns], par l'intermédiaire de la courbe de condensati[on] corrigée, établie pour rendre compte de la compres[si]bilité des gaz au-dessus du point critique, calcu[ler] *a priori* la pression de vapeur saturante à toutes [les] températures. Ce sont les *mêmes points* de la cour[be] qui interviennent dans les deux problèmes des écar[ts] à la loi des gaz parfaits et de la liquéfaction. Ain[si] le point qui nous donne le volume à — 87° sous 51 at[m] est aussi celui qui nous donne la pression de vape[ur] 0,66 atm à — 190°. En ce point, d'ailleurs, la cour[be] de condensation rectifiée se superpose exacteme[nt] à la courbe théorique et la théorie n'a aucu[ne] concession à faire.

Au contraire, les courbes qui représentent la var[ia]tion, en fonction de la température, de F et de[…] se divisent en deux parties. A gauche du point[…] (*fig.* 5 et 6), les chiffres se rapportent à la compres[…]

(1) Les chiffres ne sont pas définitifs. Il peut très bien [se] faire qu'une erreur d'extrapolation sur F soit compen[sée] par une erreur en sens contraire sur Δ. La direction de[…] tangente au dernier point des courbes expérimentales [est] mal connue.

té, à droite à la liquéfaction. La continuité est faite et ne laisse aucun doute que la liquéfaction simplement un accident de la compressibilité. n'y a aucune place pour les états « continus » van der Waals dont la conception repose sur une eur de raisonnement, et qui ne correspondent à i.

e ne pense pas qu'aucune théorie actuelle per-te une synthèse de la compressibilité et de la néfaction, aussi satisfaisante que celle de la densation progressive. La précision atteinte pour compressibilité est supérieure à 1/1000e. La même t être atteinte pour la liquéfaction, sauf peut-être voisinage immédiat du point critique; mais la rbe de base devra être recalculée avec une imale de plus.

Remarquons à ce sujet combien il est illogique de déduire la pression de vapeur saturante, généralement bien connue, des écarts à la loi des gaz parfaits beaucoup moins sûrs. La marche inverse serait plus recommandable. Mais les données numériques manquent. Pour les gaz difficilement liquéfiables, les mesures de pression de vapeur sont peu nombreuses (deux pour l'argon) et il ne faut pas songer à fonder une courbe exacte à 1/1000e sur deux points. Pour les autres corps, ce sont les mesures de compressibilité qui manquent.

Le prochain Mémoire sera consacré aux états correspondants de l'oxygène et de l'argon. Là aussi nous aboutirons à des résultats très précis, souvent en désaccord avec les idées régnantes.

Manuscrit reçu le 20 décembre 1951.

BIBLIOGRAPHIE.

Duclaux. — *J. Physique Rad.*, 1950, **11**, 235.

Duclaux. — *J. Physique Rad.*, 1950, **11**, 641.

[3] Landolt. — *Tabellen*, 5e éd., p. 109.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 13, AVRIL 1952, PAGE 205.

ÉTUDE OSCILLOGRAPHIQUE DE L'ILLUMINATION FUGACE

Par Georges DESTRIAU et Joseph MATTLER.

Laboratoire de luminescence du P. C. B. Faculté des Sciences de Paris.

Sommaire. — Les auteurs étudient les ondes de brillance dans le phénomène d'illumination fugace de Gudden et Pohl. En basse fréquence (50 Hz), les ondes de brillance sont décalées en avant sur les ondes de tension et ces décalages vont rapidement en décroissant au cours des demi-ondes successives; les décalages sont d'autant plus importants que l'intensité du champ électrique est elle-même plus élevée.

En fréquence plus élevée (1800 Hz), les décalages diminuent et arrivent même à changer de sens (onde de brillance en arrière sur l'onde de tension).

Les amplitudes des ondulations successives de brillance vont rapidement en décroissant, leur déclin étant d'autant plus rapide que l'intensité du champ est plus élevée.

Pour certains sulfures enfin, les amplitudes de brillance des demi-ondes paires se trouvent systématiquement plus grandes que les amplitudes des demi-ondes impaires.

Introduction. — Certains sulfures phosphores-nts s'illuminent vivement, mais de façon très gace lorsque, après avoir été soumis préalable-ent à l'action des rayons ultraviolets ou des yons X, ils sont placés dans un champ électrique tense (effet Gudden et Pohl). Pour réduire les ets des charges internes d'espace, il est préfé-ble d'utiliser des champs alternatifs.

Nous nous étions bornés jusqu'ici à mesurer et étudier l'évolution de la « somme totale de mière » libérée à l'illumination fugace [1]. Par contre, dans le présent travail, nous avons suivi l'évolution du phénomène dans les premiers centièmes de seconde qui suivent l'application du champ. Dans une étude antérieure, F. Krautz [2] s'est attaché principalement à l'étude du déclin; nous nous sommes plus spécialement intéressés aux décalages.

Montage expérimental. — Nous avons utilisé un multiplicateur d'électrons débitant sur une résistance de charge de 100 000 Ω. La différence de

potentiel entre les extrémités de cette résistance est appliquée, après amplification, aux plaques de déviation verticale d'un oscillographe cathodique. Un commutateur électronique permet éventuellement d'inscrire sur l'écran simultanément la courbe de variation de la brillance dans le temps (onde de brillance) et celle des variations de la tension (onde de tension, pratiquement sinusoïdale). Le balayage de l'oscillographe est déclenché par le phénomène lui-même (¹).

Décalages des ondes de brillance sur les ondes de tension. — La figure 1 fournit un exemple de l'apparence des relevés oscillographiques sous une fréquence de 50 Hz. Les ondes de brillance accusent nettement les fluctuations du champ malgré la grande persistance de la phosphorescence des sulfures utilisés, les amplitudes successives vont rapidement en décroissant et il en est de même de leurs décalages par rapport aux maxima des ondes de tension. Après quelques centièmes de seconde, les ondes de brillance et les ondes de tension se retrouvent pratiquement en phase.

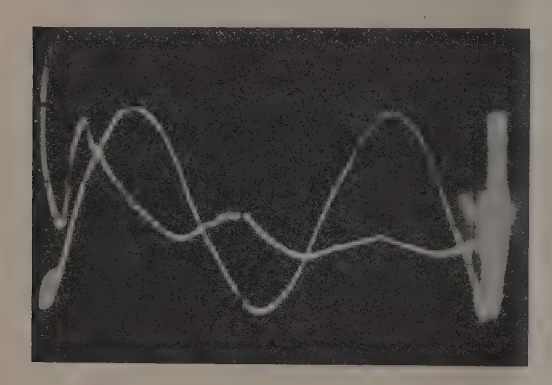


Fig. 1. — Onde de brillance à 50 Hz et onde de tension (sinusoïde).

Les décalages « en avant » des maxima de l'onde de brillance vont en décroissant au cours des demi-ondes successives.

L'un de nous a montré [3] que le champ électrique interne du cristal était en avance d'un angle φ sur le champ extérieur appliqué tel que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4\pi}{K\rho\omega},$$

K, pourvoir inducteur spécifique du sulfure;
ρ, sa résistivité;
ω, la pulsation du champ sinusoïdal.

(¹) Ces appareils ont été acquis progressivement grâce à des subventions du Centre National de la Recherche Scientifique auquel nous adressons nos remerciements.

Les valeurs, en général élevées, de φ pour les premières demi-ondes doivent provenir des faibles valeurs du produit $K\rho$ dues à la présence d'un grand nombre d'électrons qui se trouvent déplacés par l'action du champ et qui sont responsables de l'illumination fugace. La décroissance très nette de φ au cours des demi-ondes successives dénote corrélativement une diminution progressive de la conductibilité du cristal à mesure que se vident les pièges profonds dans lesquels se trouvent fixés les électrons responsables de l'illumination fugace [4].

En augmentant la tension appliquée entre les électrodes de la cellule électrophotoluminescente, on atteint des électrons piégés plus profondément, partant d'autant plus nombreux, que l'intensité du champ est elle-même plus élevée. Le nombre des électrons, déplacés lors de l'illumination fugace, croît ainsi avec l'intensité du champ, on doit donc corrélativement s'attendre à un accroissement de conductibilité se traduisant par un accroissement du décalage φ dans les champs plus intenses.

L'expérience justifie pleinement ces prévisions; pour un sulfure de zinc au Cu préparé par Maurice Curie, calciné à 900°, les décalages des trois premières ondulations de brillance (pour un champ de fréquence 50 Hz) sont données dans le tableau ci-dessous.

Champ en kilovolts efficaces par centimètre.	Décalages en avant (φ). 1re ondulation.	2e ondulation.	3e ondulation.
65 kV : cm...	0,09 π	0	0
100 » ...	0,15 π	0,03 π	0,03 π
200 » ...	0,28 π	0,10 π	0,06 π

Pour un sulfure de zinc au cuivre préparé par Guntz (n° 110), nous obtenons pareillement, pour la première ondulation :

35 kV : cm...........	0,16 π
100 »	0,30 π
200 »	0,34 π

Ces résultats sont illustrés par les figures 2 et 3 relatives au premier sulfure.

En opérant à fréquence plus élevée, l'accroissement de la pulsation ω doit se traduire par une diminution des décalages φ. Les expériences ont été faites avec une fréquence de 1800 Hz; d'une manière générale, les avances de phase φ sont effectivement réduites mais, chose apparemment paradoxale, elles tendent rapidement à devenir négatives dès la deuxième ou la troisième ondulation de brillance. Ainsi donc, si les premiers maxima de brillance apparaissent presque en phase avec les maxima de l'onde de tension, les suivants se présentent en retard (*fig.* 4). Il y a là une anomalie que ne prévoit pas le calcul, mais qui peut s'expliquer par une faible persistance de la luminescence excitée, le

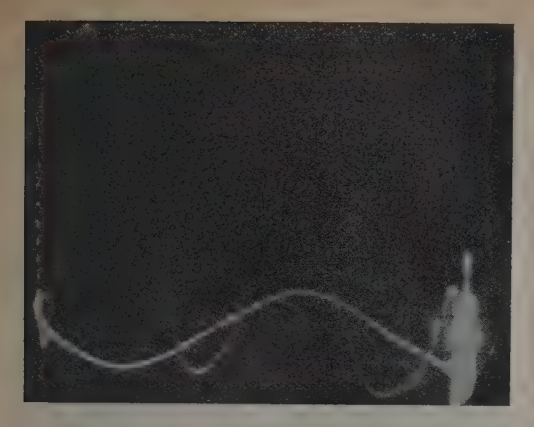


Fig. 2. — Champ de 165 kV efficaces par centimètre.

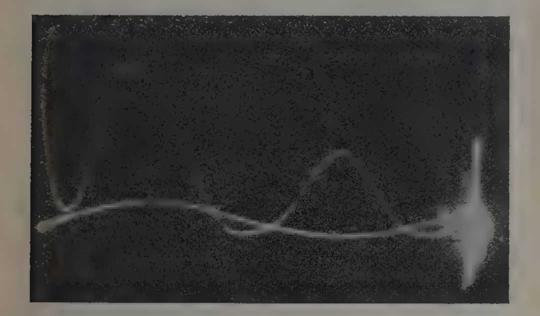


Fig. 3. — Champ de 66 kV efficaces par centimètre.

Fig. 2 et 3. — Ondes de brillance 50 Hz, ZnS (Cu).

Noter, particulièrement pour le premier maximum de l'onde de brillance, le décalage moins grand dans la figure 3. Les maxima d'amplitude étant évidemment plus faibles dans la figure 3.

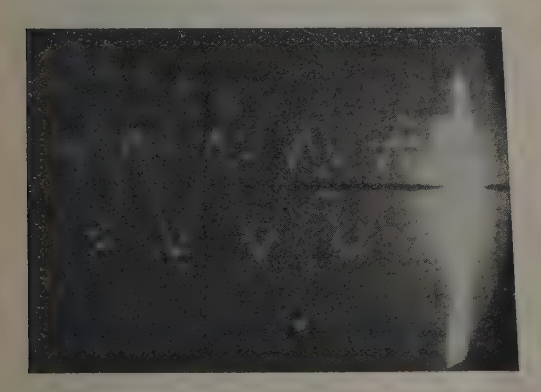


Fig. 4. — Ondes de brillance 1800 Hz, SZn (Cu). Champ de 44 000 V efficaces par centimètre.

Noter le premier maximum en phase avec le maximum correspondant de l'onde de tension; les autres maxima se présentent avec des retards de plus en plus grands.



Fig. 5. — 30 s d'irradiation.

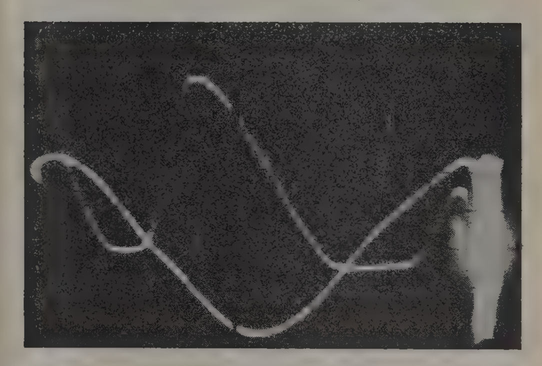


Fig. 6. — 1 mn d'irradiation; l'amplitude est maximum.

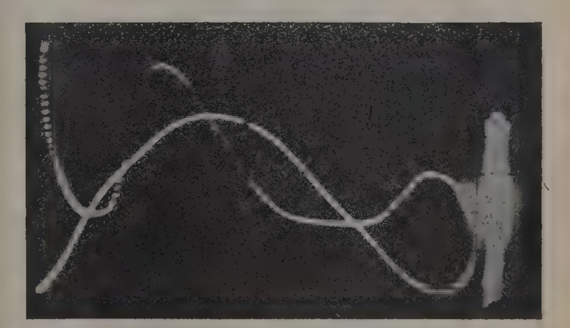


Fig. 7. — 15 mn d'irradiation; amplitude plus faible.

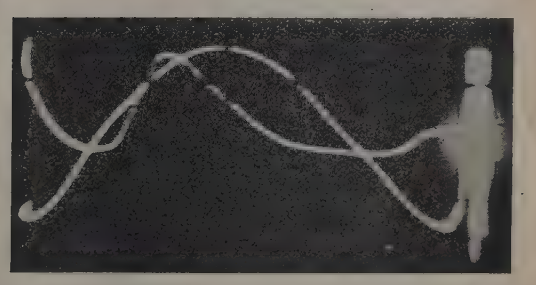


Fig. 8. — 30 mn d'irradiation; amplitude encore plus faible. Les décalages restent par contre, constants.

Fig. 5 à 8. — Influence de la durée d'irradiation préalable aux rayons X (50 Hz).

temps séparant deux maxima successifs de l'onde de brillance étant ici de l'ordre de 3 dix-millièmes de seconde seulement.

Les décalages φ semblent, par contre, rester indépendants de la durée préalable d'irradiation aux rayons X. Nous avons montré [1] que la « somme de lumière » émise à l'illumination fugace commençait par croître avec la durée d'irradiation, elle passait par un maximum pour une certaine dose de rayonnement excitateur, puis elle décroissait progressivement vers une limite finie, assez faible, lorsque la durée d'irradiation croissait indéfiniment.

L'analyse oscillographique confirme, dans le détail de chaque demi-période, les résultats obtenus précédemment avec le montage « intégrateur » que nous avions utilisé jusqu'ici dans les travaux précédemment cités. Quelques résultats sont représentés sur les clichés des figures 5, 6, 7, 8 pour un sulfure mixte de zinc et de cadmium.

Avec l'intensité du faisceau excitateur utilisé, le maximum d'amplitude de l'illumination fugace apparaît pour une durée d'irradiation d'une minute (*fig.* 6), au delà, pour des irradiations plus longues, les amplitudes vont en décroissant à mesure qu'augmente la durée d'irradiation (*fig.* 7 et 8). Les amplitudes sont de même plus faibles pour une irradiation moins prolongée de 30 s (*fig.* 5). Les décalages, par contre, apparaissent comme constants.

Déclin de l'illumination fugace. — Lorsqu'on observe le phénomène global et non pas dans le détail d'une demi-période, on se rend déjà compte qu'après une illumination extrêmement vive et brève, il persiste une luminescence plus faible à évolution plus lente. L'illumination fugace apparaît ainsi comme une sorte de phosphorescence dont le déclin serait particulièrement rapide dans les toutes premières demi-ondes de variation du champ.

Les oscillogrammes accusent effectivement une chute rapide des maxima successifs des deux ou trois premières ondulations de brillance et cette chute est d'autant plus rapide que, toutes conditions égales par ailleurs, l'intensité du champ électrique est plus élevée. Les figures 9 et 10 relatives à un sulfure de zinc au cuivre préparé par Grillot (43 A) illustrent ce fait. Sur la figure 9, le champ appliqué était de 180 000 V efficaces par centimètre, dans ces conditions le maximum correspondant à 2/100e de seconde (pointe B) n'est que les 13/100e seulement du maximum correspondant à 1/100e de seconde (pointe A). Sur la figure 10, pour un champ moins intense de 100 000 V efficaces par centimètre seulement, le même rapport des maxima correspondants B et A est de 0,5.

En réduisant la vitesse du balayage et sans superposer l'onde de tension à l'onde de brillance, on peut observer le déclin pour des durées plus élevées de l'ordre de 0,14 s à la fréquence de 50 Hz (*fig.* 11 et 12). Comme sur les figures précédentes 9 et 10, le déclin initial est moins rapide dans les champs moins intenses.

Les déclins observés sont, en général, réguliers en ce sens que les maxima des demi-ondes successives vont régulièrement en décroissant. Il existe cependant des substances qui présentent une anomalie curieuse, les maxima des demi-ondes impaires

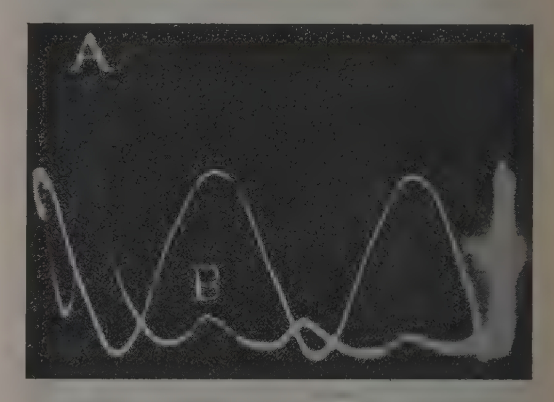


Fig. 9. — Champ de 180 kV efficaces par centimètre.

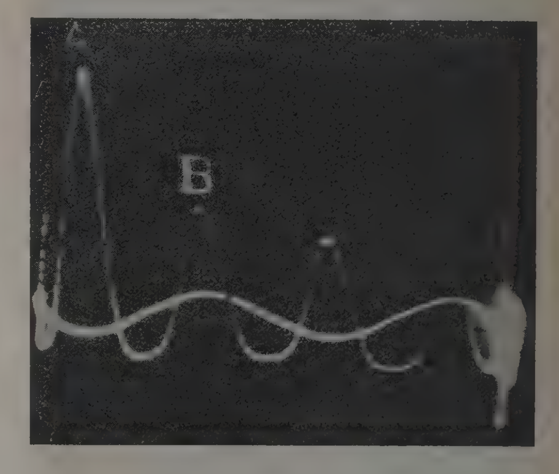


Fig. 10. — Champ de 100 kV efficaces par centimètre. Le déclin est plus rapide sur la figure 9.

Fig. 9 et 10. — Sulfure de zinc au cuivre n° 43 A (50 Hz).

se trouvent systématiquement moins élevés que ceux des demi-ondes paires. La figure 13, relative à un sulfure Guntz n° 107, illustre ce cas. En joignant les divers sommets, d'une part ceux des demi-ondes impaires et, d'autre part, ceux des demi-ondes paires, on obtient deux courbes de déclin différentes et tout se passe comme s'il existait un sens privilégié pour l'action du champ.

Cette dissymétrie, qui nous paraît surprenante, fait actuellement l'objet d'une étude spéciale, elle est à rapprocher d'une dissymétrie identique que

nous avons observée dans le phénomène d'émission de lumière sous la seule action des champs électriques sinusoïdaux.

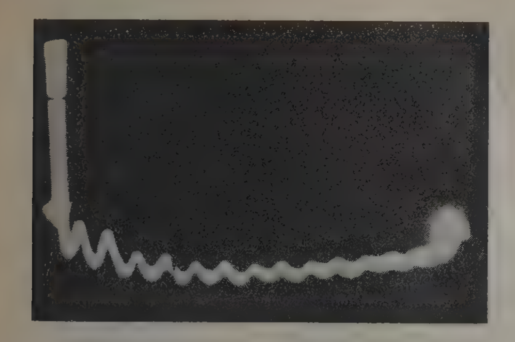


Fig. 11. — Champ de 160 kV efficaces par centimètre.

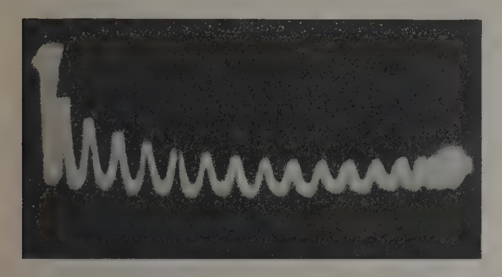


Fig. 12. — Champ de 30 kV efficaces par centimètre. Noter le déclin plus rapide sur la figure 11.

Fig. 11 et 12. — Sulfure de zinc au cuivre n° 43 A (50 Hz).

Conclusions. — Nous retrouvons dans les ondes de brillance du phénomène d'illumination fugace de Gudden et Pohl, en basse fréquence, les décalages en avant sur les ondes de tension observés dans le phénomène d'électroluminescence pure. Ces décalages vont en s'atténuant au cours des demi-ondes successives en raison des variations progressives de conductibilité et de constante diélectrique.

A fréquence plus élevée (1800 Hz), probablement du fait d'une légère persistance, les ondes de brillance reculent légèrement si bien que les premiers

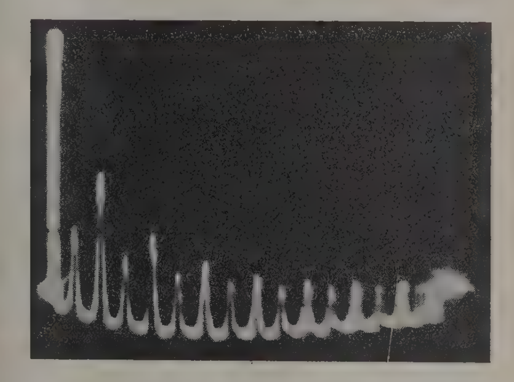


Fig. 13. — Sulfure de zinc au cuivre (Guntz, n° 107) (50 Hz). Champ de 130 kV efficaces par centimètre. Noter la différence des ondes paires et des ondes impaires.

maxima des ondulations de brillance restent légèrement en avance sur les maxima correspondants des ondes de tension, puis les ondulations suivantes se présentent, au contraire, en retard.

Les amplitudes successives décroissent d'autant plus rapidement que les champs appliqués sont plus intenses, enfin pour certaines substances, on retrouve une certaine dissymétrie d'émission suivant le sens du champ.

Manuscrit reçu le 17 janvier 1952.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Destriau G et Mattler J. — *J. Physique Rad.*, 1946, **7**, 259.
[2] Krautz E. — *Z. Naturf.*, 1949, **4**, 284.
[3] Destriau G. — *J. Chim. Phys.*, 1937, **8**, 462.
[4] Mattler J. et Curie D. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 2086; Vigean Mme et Curie D. — *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **232**, 955.

SUR LE CARACTÈRE OUVERT DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Par PAULETTE DESTOUCHES-FÉVRIER.
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — Une théorie Th_1 est dite *plus complète* qu'une théorie Th_0 s'il existe une grandeur A de Th_1 ignorée de Th_0, la théorie Th_1 fournissant les mêmes prévisions que Th_0 dans le domaine d'adéquation de Th_0 à partir des même résultats de mesures initiales.

On montre qu'une mécanique ondulatoire, et plus généralement une théorie essentiellement indéterministe, est une théorie ouverte ou incomplète, en ce sens qu'on peut toujours supposer qu'elle laisse échapper des « grandeurs ignorées », grandeurs dont on peut tenir compte dans une théorie plus complète qui aura nécessairement même structure. Une théorie déterministe, au contraire, est complète, et l'on peut y définir des systèmes identiques, ce qui est impossible dans une théorie subjectiviste, où l'on peut seulement définir des *systèmes semblables*. Ainsi, on ne peut espérer remplacer une théorie essentiellement indéterministe par une théorie plus complète qui serait déterministe. On examine enfin divers essais difficilement acceptables de constrution d'une théorie déterministe pour la microphysique.

1. **Définition d'une théorie plus complète qu'une autre.** — Nous nous proposons d'examiner ici la thèse de certains auteurs, notamment Einstein [1], selon lesquels la Mécanique ondulatoire est une théorie incomplète, fournissant des phénomènes physiques une description partielle.

Nous partirons de cette condition minimale qu'une théorie physique, à partir du résultat de mesures initiales, doit permettre le calcul de prévisions concernant les résultats de mesures ultérieures, prévisions s'exprimant en général par des probabilités. Ceci nous permet de placer la discussion dans le cadre précis de la théorie générale des prévisions [2].

Si la Mécanique ondulatoire (en abrégé Th_{MO}) est incomplète, il doit être alors possible de construire une théorie Th plus complète. Cette théorie Th, comme Th_{MO}, doit permettre le calcul de prévisions. On peut donc utiliser dans Th le formalisme de la théorie générale des prévisions [3], [5]. Alors, chaque connaissance fournie par une mesure permise par les lois de Th_{MO} donne aussi une connaissance en Th, mais il y a au moins une grandeur A de Th (grandeur qui peut ne pas être effectivement mesurable) ignorée par Th_{MO}, sinon Th ne serait pas plus complète que Th_{MO}.

Ceci nous conduit à poser cette définition :

DÉFINITION. — Une théorie Th_1 sera dite *plus complète* qu'une théorie Th_0 s'il existe une grandeur A de Th_1 ignorée par Th_0, la théorie Th_1 fournissant les mêmes prévisions que Th_0 dans le domaine d'adéquation [4] de Th_0 à partir des mêmes résultats de mesures initiales.

Cela signifie qu'il existe dans Th_1 un opérateur $\mathbf{A}$ ayant les propriétés des opérateurs associés aux grandeurs physiques [1] et qu'il n'est pas possible de définir dans Th_0 un opérateur $\mathbf{A}_0$ ayant les mêmes propriétés que $\mathbf{A}$.

2. **Premier cas de théorie plus complète.** — Un premier cas de théorie Th_1 plus complète que Th_0 est celui où il y a au moins une grandeur complète [2] en Th_0 qui ne l'est pas en Th_1. Si Th_0 est Th_{MO} il y a au moins un cas de mesure qui détermine une fonction d'onde unique ψ en Th_{MO} (grandeur maximale ou grandeur complète) et qui, dans Th, ne détermine qu'un ensemble E_ψ d'éléments de prévision X. De cette façon, s'établit une correspondance qui permet de définir une relation d'équivalence dans l'ensemble des éléments de prévision de Th

$$X_1 \equiv X_2 \bmod Th_{MO} \quad =_d \quad X_1 \in E_\psi \leftrightarrow X_2 \in E_\psi,$$

c'est-à-dire que X_1 est équivalent à X_2 si tous deux appartiennent au même E_ψ; cette relation est réflexive, symétrique, transitive.

Dire dans ce cas que Th est plus complète que Th_{MO} revient donc à dire qu'il y a des opérateurs, non dégénérés en Th_{MO} (opérateurs associés aux grandeurs complètes), qui en Th sont dégénérés.

(1) On démontre en théorie générale des prévisions qu'il n'y a aucune hypothèse physique dans le fait d'associer un opérateur à une grandeur physique, c'est seulement un procédé mathématique commode. Ce n'est que dans la forme analytique de l'opérateur que le contenu physique s'introduit, mais ici nous n'avons pas à considérer cette forme. Pour les propriétés générales des opérateurs associés aux grandeurs, se reporter aux ouvrages [2], [3].

(2) Pour la définition d'une *grandeur complète*, de l'opération de composition & et de la dérivation, se reporter à J. L. DESTOUCHES. *J. Physique Rad.*, 7e série, 1936, **7**, p. 354-360 et aux ouvrages [2], [3], [5].

Dans Th on peut alors définir des grandeurs au sens élargi telles que l'on obtienne des grandeurs complètes, par exemple de la façon suivante : soit C une grandeur complète dans $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$, incomplète dans Th; on peut définir B dans Th telle que $C\&B$ soit complète. En effet B sera bien définie par son opérateur **B** et celui-ci par ses éléments propres et valeurs propres. Fixons que :

1° Tout élément propre de C dans Th est élément propre de B;

2° Deux éléments du même $\mathrm{E}_{\psi_{C,a}}$ associé à chaque élément propre $\psi_{C,a}$ de C dans $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$ correspondent à des valeurs propres différentes de B (Si les $\mathrm{E}_{\psi_{C,a}}$ n'ont pas tous même puissance, alors à la valeur a de C n'est pas associée n'importe quelle valeur de B, mais seulement certaines compatibles avec a et seuls les $\mathrm{E}_{\psi_{C,a}}$ qui ont la plus grande puissance parmi tous les $\mathrm{E}_{\psi_{C,a}}$ correspondent à tout le spectre de B).

Ces deux conditions fixées, on peut achever arbitrairement la définition de B.

De cette façon, on a construit une théorie Th qui, pour les grandeurs prises en considération dans $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$, fournit les mêmes prévisions que $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$ et qui fait intervenir des grandeurs ignorées par $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$, qui donc est plus complète que $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$.

Un exemple de ce cas de théorie plus complète est celui où $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$ désigne la mécanique ondulatoire non relativiste sans spin et où Th désigne la mécanique ondulatoire avec spin. Les composantes du « spin » d'un corpuscule sont des grandeurs ignorées par la première théorie et dont la seconde tient compte, tout en fournissant les mêmes prévisions dans le domaine d'adéquation de la première. Dans ce cas, la grandeur B, dans le raisonnement précédent, sera formée par exemple d'une composante σ_z du spin et du carré σ^2 du spin, soit

$$B = \sigma_z \& \sigma^2.$$

3. Second cas de théorie plus complète. — L'autre cas sera celui où toute grandeur complète de Th_0 est encore une grandeur complète de Th_1, mais il y a au moins une grandeur A de Th_1 ignorée par Th_0. Ce cas est à diviser en deux sous-cas :

1° Il existe des grandeurs figurant dans Th_0, soit D, composables dans Th_1 avec A;

2° A n'est composable avec aucune grandeur de Th_0. Notons qu'il peut exister à la fois des grandeurs telles que B et des grandeurs telles que A.

Lorsque l'on est dans le cas envisagé maintenant, un ensemble fondamental des grandeurs complètes de Th_1 est plus riche qu'un ensemble semblable de Th_0. En effet, dans les deux sous-cas, à partir de A et d'autres grandeurs de Th_1, on peut former une grandeur complète ignorée de Th_0.

Dans le cas où A est composable avec au moins une grandeur D de Th_0, on peut considérer une grandeur D_1 telle que A est composable avec D_1, mais il n'existe pas de grandeur F composable avec D_1 et ne dérivant pas de D_1, telle que A soit composable avec $D_1\&F$. La grandeur D_1 joue alors dans le passage de Th_0 à Th_1 un rôle analogue à celui de C dans le premier cas. A un résultat de mesure de D_1 correspond un ensemble $\mathfrak{e}$ de fonctions d'ondes. (D_1 étant supposée incomplète, cet ensemble pourrait être réduit dans Th_0, et par suite dans Th, par mesure d'une grandeur F venant compléter D_1, mais $D_1\&F$ serait par hypothèse incomposable avec A). A cet ensemble $\mathfrak{e}$ correspond dans Th un ensemble $\mathrm{E}_{\mathfrak{e}}$ d'éléments de prévision. En mesurant $A\&D_1$, ou une grandeur $A\&B\&D_1$ complète dans Th si $A\&D_1$ est incomplète dans Th, on peut décomposer les éléments de $\mathrm{E}_{\mathfrak{e}}$ en classes d'un seul élément, mais on peut définir une relation d'équivalence sur les éléments de prévision de Th comme dans le premier cas :

$$\mathrm{X}_1 \equiv \mathrm{X}_2 \bmod D_1 \quad =_{\mathrm{d}} \quad \mathrm{X}_1 \in \mathrm{E}_{\mathfrak{e}} \leftrightarrow \mathrm{X}_2 \in \mathrm{E}_{\mathfrak{e}}.$$

4. Propriété fondamentale d'une théorie plus complète. — Une théorie Th_1 ne peut remplacer une théorie Th_0 (en particulier ne peut remplacer $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$) que si elle fournit les mêmes prévisions (ou des prévisions très voisines) que celles de Th_0 dans son domaine d'adéquation. Il en résulte que *si deux grandeurs A, B sont non simultanément mesurables en droit dans* Th_0, *elles le sont encore dans toute théorie plus complète* Th. En effet, si cela n'avait pas lieu les prévisions seraient différentes en vertu d'un résultat de la théorie générale des prévisions [5] et l'une des deux théories serait inadéquate; or nous supposons Th_0 adéquate.

Dans $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$, il y a x et p_x qui sont non simultanément mesurables, donc x et p_x le sont encore dans Th plus complète en vertu de ce qui précède; par suite, Th est essentiellement indéterministe [5], et le principe de décomposition spectrale y est valable [6]; Th est donc encore une théorie ondulatoire. On peut de nouveau lui appliquer le même processus et faire intervenir de nouvelles grandeurs cachées analogues à A. D'où :

Théorème. — 1° *Une mécanique ondulatoire est une théorie ouverte (ou incomplète) en ce sens qu'on peut la remplacer, avec mêmes prévisions, par une théorie plus complète faisant intervenir des grandeurs ignorées de la mécanique ondulatoire.*

2° *Cette théorie plus complète est, elle aussi, une mécanique ondulatoire et possède les mêmes propriétés fondamentales que la première : indéterminisme essentiel et caractère ouvert.*

Ceci montre, non seulement que la mécanique ondulatoire est ouverte, mais qu'il en sera de même de toute théorie plus complète qu'elle : une mécanique ondulatoire est une théorie essentiellement incomplétable.

5. **Considérations sur l'hamiltonien.** — Dans la théorie plus complète Th, on peut être conduit à remplacer l'hamiltonien $\mathbf{H}$ (correspondant exactement à celui de $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$) par un hamiltonien $\mathbf{H}'$ dans lequel interviendront les grandeurs ignorées par $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$ (cas où Th est la mécanique ondulatoire avec spin, $\mathbf{H}'$ étant l'hamiltonien qui tient compte des termes où figure le spin; un processus semblable se présente pour le spin isotopique).

Dans le premier cas de théorie plus complète (*cf.* § 2), l'hamiltonien $\mathbf{H}_1$ de Th, fournissant les mêmes prévisions que celles issues de $\mathbf{H}_0$ pour les grandeurs de $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$, n'est pas univoquement déterminé, car on peut faire évoluer arbitrairement les éléments d'un $\mathrm{E}_{\psi(t)}$ pourvu qu'ils demeurent dans cet ensemble. On a

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{K}.\mathbf{H}_0,$$

où $\mathbf{H}_0$ laisse invarié chaque élément d'un $\mathrm{E}_{\psi(t)}$, une fois fixée une ordination des éléments de chaque E_ψ, et où $\mathbf{K}$ transforme les éléments d'un $\mathrm{E}_{\psi(t)}$ en eux-mêmes; $\mathbf{K}$ définit un automorphisme dans les $\mathrm{E}_{\psi(t)}$. En ne tenant compte que des grandeurs de Th_0, l'opérateur $\mathbf{K}$ demeure indéterminé. Mais si l'expérience permet de mettre en évidence une grandeur ignorée par Th_0, alors $\mathbf{H}_1$ va se trouver déterminé (au moins en partie) lorsque l'on tiendra compte de ces exigences expérimentales nouvelles. On essaiera alors d'élargir le domaine d'adéquation et l'opérateur $\mathbf{H}_1$ pourra se trouver remplacé par un opérateur $\mathbf{H}_2$ tel que

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 + \mathbf{L} = \mathbf{K}.\mathbf{H}_0 + \mathbf{L}.$$

La théorie plus complète Th peut être telle qu'il n'y ait pas d'hamiltonien en général, mais dans le domaine d'adéquation de Th_0 on pourra en définir un.

6. **Caractère ouvert et systèmes identiques.** — Cherchons à définir deux systèmes identiques. Considérons un ensemble de N systèmes physiques. Nous pouvons le décomposer en classes telles que deux systèmes de même classe admettent même hamiltonien (donc même structure). Nous pouvons aller plus loin et décomposer un ensemble de N' systèmes ayant même hamiltonien en classes de systèmes admettant, à partir de mesures complètes faites à $t_0, t'_0, \ldots, t_0^{(n)}$, des fonctions d'ondes identiques rapportées à des repères galiléens $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$. *Pour que deux systèmes soient identiques, il est nécessaire qu'on ne puisse pas décomposer en sous-classes une classe de systèmes définis comme identiques.* Appelons cette condition : *condition de prédicativité de l'identité.*

Par suite du caractère ouvert d'une mécanique ondulatoire, on peut imaginer des grandeurs ignorées, A, par exemple; alors, par rapport à la théorie Th contenant A, tous les systèmes d'une classe admettant même ψ peuvent être décomposés en sous-classes, deux systèmes appartenant à la même sous-classe s'ils ont même élément de prévision X de Th. Deux systèmes d'une même sous-classe seront alors appelés *systèmes semblables* [7]. Ils ne peuvent pas être considérés comme identiques, car le même processus peut être appliqué à la théorie Th en raison de son caractère ouvert. Il résulte alors de ce qui précède :

Théorème. — *Dans toute théorie ondulatoire (c'est-à-dire dans toute théorie subjectiviste), en vertu du caractère incomplet (ou ouvert), on ne peut définir de systèmes identiques, car on ne peut affirmer que des systèmes équivalents (c'est-à-dire de même classe) le demeureront dans une théorie plus complète.*

En effet, des systèmes identiques doivent satisfaire à la condition de prédicativité de l'identité; or, le caractère ouvert d'une théorie ondulatoire empêche d'affirmer toute prédicativité.

D'autre part, pour être prise en considération en physique théorique, la définition de l'identité de deux systèmes doit être telle qu'on possède un procédé expérimental pour la reconnaître, ce qui ne peut être réalisé qu'au moyen de mesures. Mais les résultats de mesures sont décrits par les fonctions d'ondes initiales (ou éléments initiaux). A celles-ci on peut appliquer le processus précédent de passage à une théorie plus complète, d'où ce résultat :

Théorème. — *En vertu du caractère ouvert (ou incomplet) d'une mécanique ondulatoire, il est impossible de donner une définition de deux systèmes identiques qui soit accessible à l'expérience et satisfasse à la condition de prédicativité. On peut seulement définir des « systèmes semblables » relativement à un formalisme de prévision, l'intervention de grandeurs ignorées permettant toujours de décomposer en sous-classes des systèmes semblables au sens précédent.*

7. **Caractère complet ou fermé d'une théorie déterministe.** — Considérons une théorie déterministe Th_0. Est-elle ouverte dans le même sens que la mécanique ondulatoire ? Pour une telle théorie, le formalisme des prévisions peut être réduit à un schéma ponctuel dans un espace de phases : on peut définir dans ce cas une grandeur d'état G dont les résultats de mesures imprécis sont des ensembles de points d'un espace (Γ) dit *espace de phase.* Le point figuratif M du système à l'instant t dans (Γ) est appelé « *état* » du système à cet instant. Si l'état du système n'est pas connu exactement on peut établir qu'on est libre de supposer qu'il est

un point déterminé, mais inconnu de l'ensemble des états possibles, d'après les connaissances acquises. Ceci s'exprime encore en disant qu'un résultat de mesure imprécis de toute grandeur est *analysable* (3). Si l'on connaît l'état à t_0, soit M_0, celui-ci est déterminé à tout instant par une correspondance ponctuelle dans l'espace (Γ)

$$M(t) = \mathbf{U}(t, t_0) M_0.$$

Mais, dans ce cas, on peut aussi constituer un formalisme général et considérer une théorie plus complète Th, comme dans le cas de la mécanique ondulatoire. Alors il y a un ensemble E_ψ d'éléments de prévision X de Th associés à une valeur de la grandeur d'état G, à laquelle il correspond un élément de prévision ψ dans le formalisme équivalent à celui de la théorie déterministe Th_0. Deux cas sont alors possibles : ou bien il existe dans Th une grandeur A non simultanément mesurable avec G, ou bien dans Th il y a au moins une grandeur B ignorée par Th_0 telle que B et G soient simultanément mesurables et que $B\&G$ soit une grandeur complète.

Dans ce dernier cas une mesure précise de $B\&G$ fournit un élément de prévision X bien déterminé unique. Mais si Th est plus complète que Th_0, alors Th et Th_0 fournissent les mêmes prévisions à partir des mêmes connaissances et la connaissance de la valeur de G à t_0 suffit pour déterminer à tout instant t la valeur de cette grandeur G. Ainsi la valeur de G évolue indépendamment des valeurs des grandeurs ignorées. Il y a séparation : les prévisions pour les valeurs des grandeurs ignorées peuvent dépendre ou ne pas dépendre de G, et même Th peut être une théorie essentiellement indéterministe, mais *G évolue indépendamment des valeurs des grandeurs ignorées : G est une grandeur auto-prévisible dans* Th. Comme G peut être considérée séparément des grandeurs ignorées, la théorie Th_0 est en quelque sorte fermée. Si deux systèmes « identiques » relativement à Th_0 ne le sont plus relativement à Th, néanmoins s'ils comportent la même valeur pour G, ils évolueront de manière à fournir toujours la même valeur pour G.

Soit Th_0 une théorie déterministe et une théorie Th plus complète que Th_0. Deux éventualités sont à distinguer :

1° Th est une théorie déterministe ;

2° Th est une théorie essentiellement indéterministe.

Dans le premier cas Th possède une grandeur d'état G_1; alors nécessairement

$$G_1 = G \& A,$$

A étant une grandeur ignorée par Th_0. A la grandeur d'état G_1 correspond pour Th un espace de phases (Γ_1). Cet espace est alors le produit direct de l'espace (Γ) et d'un espace (R_A) qui n'est autre que l'espace des observations de A.

Le point M_1 figuratif de l'état du système est alors tel que sa projection sur (Γ) évolue d'une façon autonome, selon les lois de Th_0; par suite, la projection sur (R_A) évolue aussi d'une façon autonome. En somme, si l'on met en évidence une grandeur ignorée, la théorie ainsi complétée restant déterministe, il y a séparation et la partie du système caractérisée par G évolue toujours de même (toutefois, dans le domaine expérimental élargi et décrit par Th, la séparation peut cesser d'avoir lieu, mais elle existe dans le domaine d'adéquation de Th_0). Deux systèmes identiques S_0 et S'_0 de Th_0, qui évoluent de même, apparaissent dans Th comme deux parties séparables identiques de systèmes S et S_1 (S et S_1 peuvent naturellement ne pas être identiques; dans ce cas, leurs parties complémentaires S_A et S'_A ne sont pas identiques).

Ainsi pour une théorie déterministe que l'on complète au moyen de grandeurs ignorées et qui demeure déterministe, ceci revient à ajouter des paramètres nouveaux séparables de ceux considérés primitivement. Des systèmes identiques demeurent identiques en étant considérés comme parties de systèmes plus complets. C'est en cela que consiste le caractère complet d'une théorie déterministe par rapport aux grandeurs ignorées.

Dans le second cas, Th est une théorie ondulatoire. La grandeur G apparaît alors dans Th comme une grandeur auto-prévisible, mais le système S_0 n'apparaît pas comme une partie d'un système S étudié dans Th, c'est toujours S_0 qui est étudié; il y a cette fois au moins une grandeur A ignorée de Th_0 non simultanément mesurable avec G; si l'on mesure G, cette grandeur évolue d'une façon autonome comme dans Th_0, mais si l'on mesure une grandeur telle que A, on ne peut plus sans contradiction supposer que G a une valeur déterminée mais inconnue, cela en vertu des propriétés des théories essentiellement indéterministes. Dans ce cas, lors du passage de Th_0 à Th, le caractère complet de la théorie déterministe est perdu. Lorsque l'on mesure G, vis-à-vis de la grandeur G et de celles qui en dérivent, les caractères déterministes subsistent; ils s'effacent si l'on mesure une grandeur incomposable avec G; cette fois, on passe au caractère ouvert des théories ondulatoires.

8. **Propriétés des grandeurs auto-prévisibles.** — Considérons dans une théorie Th essentiellement subjectiviste une grandeur auto-prévisible A_1 (on montre qu'à chaque grandeur A on peut associer une grandeur A_1 auto-prévisible et qui, à une époque t_0, ait même valeur que A; il en existe donc dans toute théorie Th, en particulier il en existe qui sont en même temps complètes). Pour une telle grandeur A_1, on établit aisément que :

(3) P. Destouches-Février, *Structure des théories physiques*, p. 95.

THÉORÈME. — *A toute grandeur auto-prévisible A_1 d'une théorie essentiellement indéterministe* Th, *on peut associer une théorie partielle* Th_0 *telle que* Th *soit une théorie plus complète que* Th_0 *et telle que* Th_0 *soit une théorie déterministe dont la grandeur d'état est cette grandeur auto-prévisible* A_1.

En particulier, ceci explique pourquoi on peut construire des théories partielles des mécaniques ondulatoires qui soient des théories déterministes (mais il est impossible de construire une théorie déterministe équivalente à une mécanique ondulatoire).

9. **Déterminisme et théorie microphysique.** — Lorsque des auteurs soulèvent la question du caractère incomplet d'une mécanique ondulatoire, c'est dans l'espoir de pouvoir remplacer celle-ci par une théorie déterministe. De ce qui précède, on arrive à :

THÉORÈME. — *En cherchant à compléter une théorie ondulatoire par des grandeurs ignorées, on ne peut pas rétablir le déterminisme.*

Examinons cependant de plus près le cas d'une théorie déterministe qu'on chercherait à substituer à une mécanique ondulatoire. On poserait d'abord que « tous les renseignements fournis par la connaissance de la fonction d'onde sont nécessaires mais non suffisants pour déterminer entièrement le devenir d'un système parmi les systèmes semblables représentés par ψ » [4].

Mais on sait, d'après les résultats de von Neumann [8], ainsi que ceux de J. Solomon [9], que cette connaissance ne peut pas être complétée par des paramètres cachés. D'après ce qui précède, elle ne peut pas non plus être complétée par l'intervention de grandeurs ignorées, puisqu'en les faisant intervenir on obtient une théorie de même structure que celle dont on est parti. Pourrait-on cependant, au moyen d'un autre procédé, obtenir une théorie microphysique déterministe ? Examinons les caractères que présenterait une telle théorie, soit Th_D. Etant déterministe, elle posséderait une grandeur d'état G et la valeur de l'état serait représentée par un point d'un espace de phase (Γ). Trois cas sont à envisager :

1° G est une grandeur de la mécanique ondulatoire Th_{MO}.

2° G est la composée d'une grandeur complète C de Th_{MO} et d'une grandeur ignorée par Th_{MO}, soit

$$G = C \& A.$$

Alors, en considérant une théorie Th_1 plus complète que Th_{MO} et contenant A on est ramené au premier cas. Dans ces deux cas, il existe au moins une grandeur B incomposable avec G (cas 1°) ou avec C (cas 2°). Sinon Th_{MO} serait déterministe en droit, contrairement à l'hypothèse. D'après une propriété des théories essentiellement indéterministes [5], dans ce cas il est impossible, sans introduire des contradictions, de supposer que le résultat imprécis d'une mesure pour une grandeur peut être considéré comme identique à ce même résultat complété de la supposition que cette grandeur a une valeur déterminée mais inconnue. C'est ce qu'on exprime en disant que les résultats de mesures sont *inanalysables*. Par conséquent, dans ces deux cas, on ne peut supposer que G a une valeur déterminée, mais inconnue.

3° Le troisième cas est celui où G est sans rapport avec les grandeurs mesurées. Alors cet état G peut être qualifié de métaphysique. Ceci vient encore exclure certaines hypothèses concernant la substitution d'une théorie déterministe à la mécanique ondulatoire. Si donc on cherche une théorie microphysique déterministe, son lien avec la mécanique ondulatoire doit être plus subtil.

On pourrait envisager une connexion de ce genre :

1° A une fonction d'ondes ψ correspond un certain ensemble E_ψ de points de (Γ). Ainsi, à une fonction d'ondes, c'est-à-dire à un résultat précis d'une grandeur complète, correspond un ensemble de valeurs possibles pour l'« état » du système. La théorie étant déterministe, il existe une transformation ponctuelle dans l'espace (Γ) qui transforme l'état initial M_0 du système en l'état M_t à l'instant t, soit

$$M_t = \mathbf{U}(t, t_0) M_0.$$

2° Lors d'une mesure à une époque t_1, l'« état » est « troublé », c'est-à-dire que le passage de $M_{t_1-\varepsilon}$ à $M_{t_1+\varepsilon}$ l'intervalle de temps 2ε correspondant à la mesure), n'est pas défini par une transformation ponctuelle, mais est indéterminé selon les lois quantiques : $\mathbf{U}(t, t_0)$ n'est définie que pour l'intervalle de temps (t_0, $t_{1-\varepsilon}$) séparant deux mesures consécutives. Après la seconde mesure, $\mathbf{U}$ décrit de nouveau l'évolution de l'état du système et l'on aura

$$M_t = \mathbf{U}(t, t_1) M_1,$$

M_1 étant la position du point figuratif de l'état (supposé déterminé, mais inconnu) à la fin de la mesure faite à t_1. De cette façon, on rétablit le déterminisme sauf pendant les époques de mesures, où le fait d'effectuer la mesure perturbe l'état d'une façon imprévisible, de manière que les exigences quantiques soient respectées. Mais on remarquera alors que *dans une telle théorie une mesure provoquerait une interaction entre système et appareil, d'un type tout différent de celui de l'interaction entre les diverses parties d'un système physique*, puisque pour les interactions entre parties d'un système il y a déterminisme et lors d'une mesure il y a indéterminisme.

[4] *Voir* [7], p. 446.

[5] P. DESTOUCHES-FÉVRIER. *Thèse*, Paris, 1945.

Autrement dit, on ne satisfait pas à cette exigence, remplie dans les théories classiques et dans les théories quantiques, selon laquelle une mesure consiste à coupler un appareil qui est un système physique avec le système physique observé, si bien que pour un autre observateur l'ensemble appareil-système apparaisse comme un système physique. Même en prétendant que le « trouble » est instantané et se produit quand on établit le couplage ou quand on le supprime, on ne pourrait pas satisfaire à cette condition dans l'hypothèse que nous envisageons.

La suppostion qu'une grandeur G a une valeur déterminée mais inconnue entraîne contradiction si l'on a fixé la valeur d'une grandeur incomposable avec G. Alors la grandeur d'état de la théorie considérée n'a pas de lien direct avec les grandeurs mesurables, c'est une *grandeur inaccessible*. On doit se poser la question : quelles prévisions peut-on faire à partir de l' « état » M_t ? On voit bien qu'on peut prévoir exactement l'« état » ultérieur tant qu'on ne fait pas de mesure. Si l'on fait une mesure à une époque t_1, on ne peut plus prévoir l'état pour $t > t_1$; mais les prévisions doivent concerner les résultats de mesures effectives. Or ces prévisions ne peuvent être plus fortes que celles de la mécanique ondulatoire, sinon il y a contradiction ou inadéquation.

Pour plus de précision, les conditions auxquelles devrait satisfaire une théorie microphysique déterministe sont résumées ci-dessous :

1° Il existe un « état » déterminé mais inconnu du système considéré, d'où un espace des états (Γ) ou espace de phase, avec une transformation ponctuelle $\mathbf{U}(t, t_0)$ réglant son évolution. Cet état est inaccessible à l'expérience.

2° Lors d'une mesure, il n'y a plus transformation ponctuelle des états entre $t_1 - \Delta t$ et $t + \Delta t$, si t_1 est l'époque d'une mesure et $2\,\Delta t$ sa durée; on dit que l'état est « troublé » par la mesure.

Mais il faut bien remarquer que cet état n'est pas troublé d'une façon quelconque; en effet :

Si la transformation ponctuelle entre $t_1 - \Delta t$ et $t_1 + \Delta t$ est supposée déterminée mais inconnue, tout revient, soit à rendre analysable un résultat de mesure imprécis, ce qui est en contradiction avec les lois quantiques, soit à faire une théorie purement métaphysique c'est-à-dire sans lien avec l'expérience.

Alors, ou bien le système $(S + \mathcal{A})$, système-observé-appareil-de-mesure n'obéit pas à des lois ponctuelles d'évolution dans son espace de phase, ou bien la loi de l'interaction de S avec $\mathcal{A}$ n'est pas la même que celle de l'interaction des parties de S. Ceci est en contradiction avec le fait qu'un appareil est un système physique, ayant des caractères spéciaux dans l'intention de l'observateur, mais obéissant aux mêmes lois que les systèmes observés. Si l'on pose les mêmes lois d'interaction pour les systèmes et les appareils, alors, ou bien on renonce aux transformations ponctuelles, donc au déterminisme, ou bien on est en contradiction avec les lois quantiques. Une autre possibilité consiste à renoncer à la notion de système physique S pour ne parler que d'un système-dans-un-appareil $(S + \mathcal{A})$; alors $(S + \mathcal{A})$ peut être décrit par des lois déterministes, mais les interactions entre S et $\mathcal{A}$ s'expriment par des lois différentes de celles qui régissent les interactions entre les parties d'un système observable S.

En résumé, une théorie avec déterminisme en dehors des époques de mesure (hypothèse invérifiable expérimentalement, donc métaphysique) impose des lois spéciales d'interaction pour les appareils.

Manuscrit reçu le 5 mai 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] EINSTEIN A., PODOLSKY B. et ROSEN N. — *Phys. Rev.*, 2e série, 1935, **47**, 777.
[2] DESTOUCHES J. L. — *Corpuscules et systèmes de corpuscules*, Gauthier-Villars, Paris, 1941.
[3] DESTOUCHES-FÉVRIER P. — Recherches sur la structure des théories physiques. *Thèse*, Paris, 1945.
[4] DESTOUCHES-FÉVRIER P. — Sur l'impossibilité d'un retour au déterminisme en microphysique. *C. R. Acad. Sc.*, 1945, **220**, p. 587.
[5] DESTOUCHES-FÉVRIER P. — *La structure des théories physiques*, Presses universitaires, Paris, 1951.
[6] DESTOUCHES-FÉVRIER P. — Signification profonde du principe de décomposition spectrale. *C. R. Acad. Sc.*, 1945, **222**, p. 866.
[7] ULLMO J. — La mécanique quantique et la causalité. *Rev. philos.*, oct.-déc. 1949, p. 257.
[8] J. von NEUMANN. — *Gottingen Nachrichten*, 1929 et *Mathematische Gumdlagen der Quantenmechanik*, Springer Berlin, 1932.
[9] SOLOMON J. — *J. Physique Rad.*, 1933, **4**, 34.

PROPRIÉTÉS DIÉLECTRIQUES DE QUELQUES HALOGÉNURES D'HYDROGÈNE ET DE DEUTÉRIUM A L'ÉTAT SOLIDE

Par C. S. E. PHILLIPS,

Boursier d'échange au Laboratoire de Chimie-Physique de la Faculté des Sciences. Paris.

Sommaire. — Dispersion électrique, mesure de la constante diélectrique ε' et de la constante des pertes ε'' de HCl, DCl, HI, DI *solides* en fonction la fréquence ν et de la température T (80 c : s $\leqq \nu \leqq$ 6 Mc : s; 63° K $\leqq$ T < point de fusion).

1. HCl et DCl : un seul point de transition du premier ordre, vers 100° K. Au-dessous de ce point, on trouve *deux domaines de dispersion*, l'un à très basse fréquence, sans conductivité en courant continu (fréquence critique $f_c <$ 80 c : s à toutes les températures), l'autre à fréquence critique plus élevée ($f_c =$ 1 Mc : s pour HCl à 83° K, 1,2 Mc : s pour DCl à 88° K), qui augmente normalement avec la température (énergie d'activation 2,6 kcal : mol).

A la température de transition, les pertes en basse fréquence s'annulent presque entièrement, le domaine de dispersion correspondant disparaît. Dans le second domaine de dispersion, les pertes sont maximum à la température de transition.

Au-dessus de la transition, les phénomènes à basse fréquence réapparaissent, mais accompagnés de conductivité en courant continu, ce qui implique un autre mécanisme, dû probablement à des traces d'impuretés. Le domaine à haute fréquence se déplace vers les micro-ondes. Pas d'effet ferro-électrique.

Dans DCl insuffisamment purifié, une impureté (probablement SO_2) fait apparaître un second point de transition à 133° K (qui n'existe pas dans SO_2 pur).

2. Dans HI et DI, deux points de transition du second ordre. Phénomènes très probablement analogues à ceux qui ont été observés par Powles pour HBr et DBr, mais les fréquences critiques sont plus élevées, de sorte que seul le domaine de dispersion à basse fréquence tombe dans la gamme de mesure, au-dessous du premier point de transition. Il disparaît en ce point. Aucune dispersion n'est plus observable pour $\nu <$ 6 Mc : s; aux températures supérieures : le domaine de dispersion se trouve à des fréquences plus élevées.

Un fait nouveau important est révélé par des mesures sur DI, pour λ = 3,23 cm : ε' (3,23 cm) croît lorsqu'on passe en montant par le *second* point de transition (128,3° K) où l'on observe un maximum de la constante des pertes ε''.

Les conclusions que l'on peut tirer de cet ensemble de faits sont discutées.

1. On connaît actuellement un certain nombre de corps cristallisés où la variation de la constante diélectrique statique ε en fonction de la température présente les caractères suivants [1] :

Lorsqu'on fait décroître la température à partir du point de fusion, ε augmente d'abord comme il est normal. A une *température de transition* bien déterminée, la constance diélectrique tombe plus ou moins brusquement. En même temps, d'ailleurs, se manifestent des effets thermiques, variation de la chaleur spécifique ou chaleur latente de transition.

Il existe des cristaux présentant plusieurs points de transition successifs.

Enfin, par suite des effets de relaxation, les phénomènes diélectriques dépendent essentiellement de la fréquence.

Parmi les corps où l'on a observé de tels points de transition, ceux dont la structure moléculaire est la plus simple, sont les halogénures d'hydrogène et de deutérium. On connaît les valeurs exactes des températures de transition et des chaleurs spécifiques de ces corps qui ont été faites par Clusius et Wolf [2].

Dans notre Laboratoire, HBr et DBr ont été étudiés récemment du point de vue diélectrique par Powles [3]. Le travail actuel apporte quelques résultats relatifs à HCl, DCl, HI et DI.

2. **Dispositif expérimental.** — 1° Chaque échantillon était introduit par distillation sous vide dans une cellule diélectrique en verre à électrodes de platine. Les détails de ce montage ont déjà été publiés par Powles [3]. Pour éviter, autant que possible, la formation de cavités dans la masse cristalline, nous l'avons toujours congelée par refroidissement lent, puis maintenue à l'état solide pendant toute la durée des expériences. Évidemment, si les électrodes restent fixes, tandis que la température varie, il n'est pas toujours possible d'éviter, d'un jour à l'autre, l'apparition des fissures dans le cristal : il en résulte alors des variations apparentes de 5 à 10 pour 100 des grandeurs observées.

2° HCl a été préparé par action de H_2SO_4 concentré sur NaCl, DCl par réaction de l'eau lourde sur le chlorure de thionyle, HI et DI par réaction d'un mélange phosphore rouge-eau, ou eau lourde, sur l'iode.

3° La plupart des expériences ont été faites à température croissante : on la laissait monter très lentement à partir de 80° K, jusqu'à 2 ou 3° au-dessous du point de fusion.

Dans les cas de HI et DI, afin de mesurer les propriétés diélectriques au-dessous de la température de transition la plus basse, il a fallu faire bouillir l'azote liquide sous vide, ce qui a permis d'atteindre la température de 63° K.

4° Dans nos expérience, nous nous sommes servis de trois ponts différents donnant au total une gamme de fréquences de 80 c : s à 6 Mc : s.

a. Pont Schering : fréquences 80 c : s, 320 c : s, 1,25 et 12 kc : s;
b. Pont S. E. L. T. : fréquences 25, 50, 100, 200 et 400 kc : s;
c. Pont « TWIN-T » : fréquences 0,8, 1,6, 4 et 6 Mc : s.

Chaque essai à température croissante était fait sur un seul pont; toute la gamme de fréquences était couverte en trois séries successives de mesures, faites généralement en trois jours différents. On a obtenu ainsi les variations de la constante diélectrique ε′ et de la constante de pertes ε″ en fonction de la température, pour toutes les fréquences de la gamme considérée.

3. **HCl et DCl.** — HCl a déjà été l'objet des mesures de Cone, Dennison et Kemp [4] et de Smyth

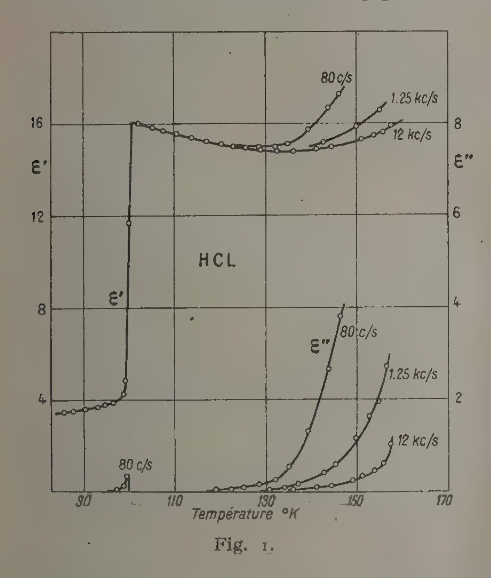


Fig. 1.

et Hitchcock [5], mais dans une gamme très restreinte de fréquences et avec des dispositifs peu sensibles.

Certains de nos résultats relatifs à HCl sont représentés sur la figure 1, où sont dessinées pour quelques fréquences les courbes de variation de ε′ et ε″ en fonction de la température. Le point de transition est très proche de 100° K. Ces courbes

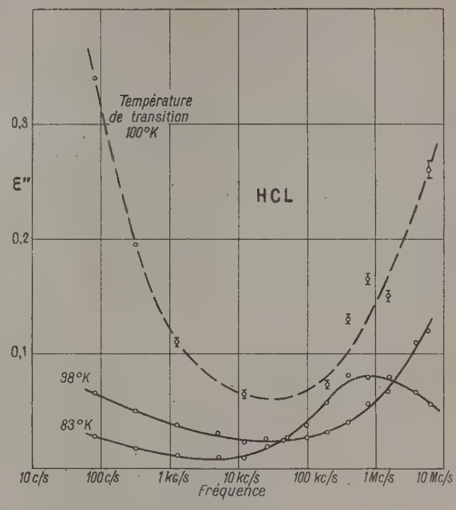


Fig. 2.

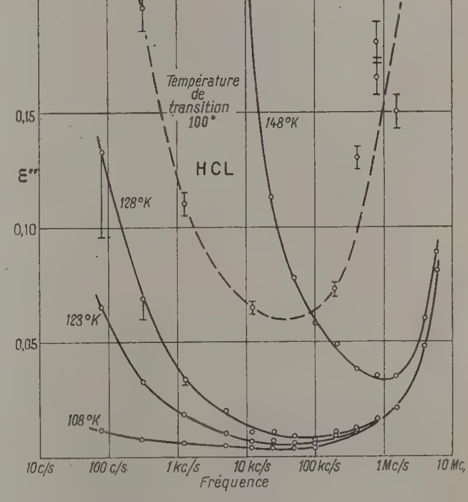


Fig. 3.

ont même allure que celles de Smyth et Hitchcock, sauf dans la région voisine de la température de fusion, où nous avons observé une croissance de ε′ et de ε″, croissance qu'avait déjà vue Powles dans une expérience antérieure, non publiée.

Le comportement de DCl est semblable à celui de HCl, sauf que la température de transition se trouve plus élevée de 4° et que les courbes que nous avons obtenues sont compliquées par la présence d'une impureté qui se manifeste d'une manière curieuse (voir *fig.* 5).

A partir des données de la figure 1 [$\varepsilon'' = f(T)$],

la fréquence étant prise comme paramètre, on peut calculer les courbes $\varepsilon'' = F(\nu)$, la température étant prise comme paramètre. Ces courbes sont représentées sur les figures 2 et 3. La première (les courbes de DCl sont presque identiques) montre qu'au-dessous du point de transition apparaissent dans notre gamme de fréquences *deux domaines de dispersion*. Le premier, situé vers les courtes longueurs d'onde, a une fréquence critique (1 Mc : s à 83° K pour HCl et 1,2 Mc : s à 88° K pour DCl), qui augmente normalement avec la température et correspond dans les deux cas à une énergie d'activation d'environ 2,6 kcal : mol. Le second domaine de dispersion se trouve à des fréquences si basses que nous en voyons seulement l'amorce dans notre gamme de mesures : on n'en observe, en effet, que la branche descendante dont la pente augmente avec la température. Sa fréquence critique est toujours inférieure à 80 c : s. Nous n'avons pu observer à ces températures, ni pour HCl, ni pour DCl *aucune conductivité* en courant continu, ce qui démontre bien qu'il s'agit d'un effet de dispersion diélectrique.

Quand on s'approche de la température de transition, la fréquence critique du premier domaine de dispersion va vers les hautes fréquences et sort de notre gamme de mesure. Néanmoins, en liaison avec l'augmentation de ε', nous observons une augmentation des pertes qui, pour toutes les fréquences, hautes ou basses, atteignent un maximum à la

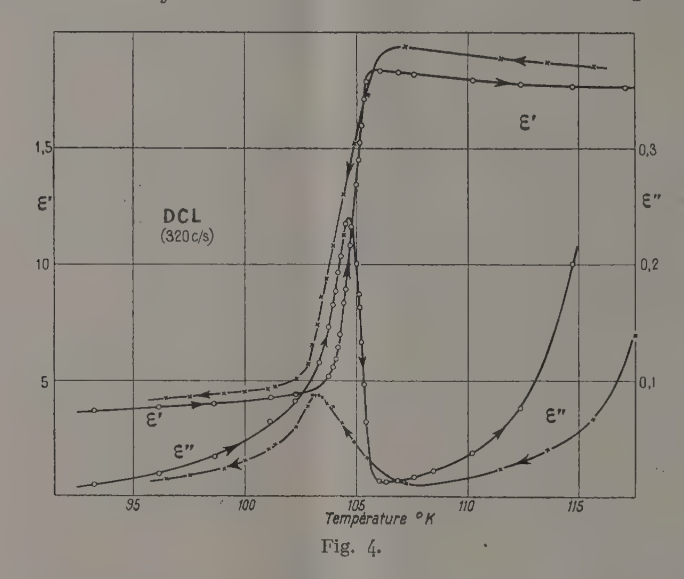


Fig. 4.

température même de transition (courbe en traits discontinus).

Aussitôt au-dessus de la transition, les pertes à basse fréquence disparaissent presque complètement. Celles à haute fréquence diminuent notablement, surtout dans la région des centaines de kilocycles par seconde, mais il subsiste nettement un domaine unique de dispersion dont la fréquence critique se trouve dans le domaine des microondes (*fig.* 3).

Lorsqu'on laisse encore monter la température, on retrouve des pertes aux basses fréquences, mais celles-ci sont accompagnées maintenant d'une conductivité en courant continu. Nous avons indiqué sur la figure 3 (par des traits verticaux) la contribution de cette conductivité à la courbe de 128° K : elle paraît être trop faible pour expliquer toute l'amplitude des pertes.

Pour obtenir la courbe en traits discontinus relative au point de transition, nous avons minutieusement suivi cette transition à fréquence fixe en faisant varier très lentement la température. Nous ne donnons sur la figure 4, que la courbe de DCl à 320 c : s, les autres ayant la même allure. La transition se manifeste par une montée brusque de ε' qui passe de 4 à 18 dans un intervalle de 1,5° environ et décroît ensuite lentement. A ce phénomène, correspondent des variations de ε'', avec un maximum très aigü qui coïncide à peu près avec le point de pente maximum de ε'. La courbe en pointillé des figures 2 et 3 montre la variation de cette valeur maximum avec la fréquence.

Il faut noter que, lors du refroidissement, la variation de ε', ainsi que la maximum de ε'' sont plus étalés, avec une hystérésis thermique de 1,5° environ.

Les pertes au point de transition ont pratiquement la même valeur pour HCl et DCl. De plus, ni ε', ni ε'' ne sont modifiés par la superposition d'un champ constant de 3 kV : cm, ce qui serait le cas si le cristal devenait ferroélectrique.

4. **Effet des impuretés.** — Il est probable que la dispersion aux basses fréquences, accompagnée par une conductivité en courant continu, qui commence vers 110° K et augmente rapidement quand on approche de la température de fusion, est due à des impuretés. Daniel et Stark [6] ont observé dans le cas d'une cétone solide un phénomène analogue lié à des traces d'impuretés. Nous avons retrouvé cet effet dans les cristaux de D_2S et de SO_2. Cependant, les expériences sur HBr et DBr [3] et sur HI et DI (*voir* ci-dessous) ne révèlent aucun accroissement, ni de ε', ni de ε'', aux basses fréquences, vers la température de fusion. Il faut donc admettre que le réseau qui entoure les molécules étrangères, joue un rôle important.

Dans notre premier échantillon de DCl, la présence d'une impureté s'est manifestée d'une manière tout à fait différente [7]. On voit sur la figure 5 que l'impureté produit un deuxième point de transition à 133° K, c'est-à-dire environ 28° au-dessus de celui qui correspond au DCl pur. Le premier point de transition, à en juger par sa température même (105° K) et par la pente presque verticale

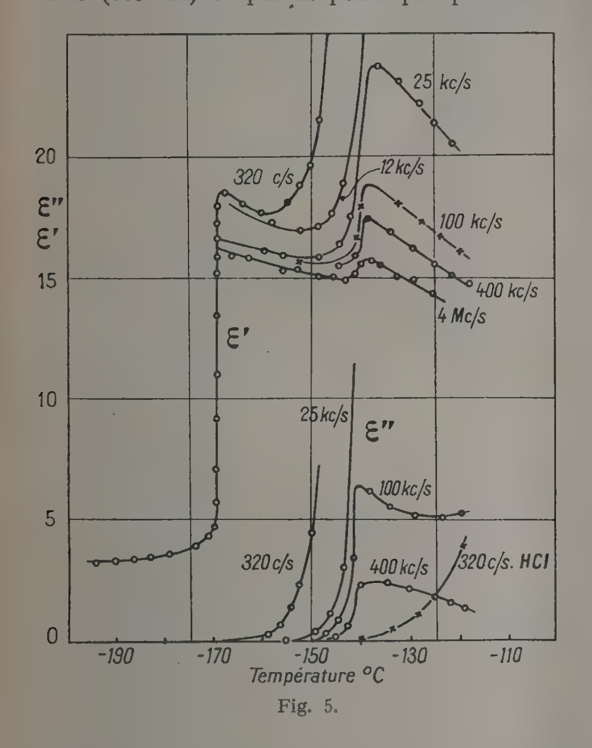


Fig. 5.

$\varepsilon' = f(T)$ juste au-dessous de ce point, ne paraît pas être affecté par la présence de l'impureté. Quelques distillations répétées ont diminué progressivement ces anomalies sans changement notable des deux températures de transition. L'effet décroît avec la fréquence, de telle sorte qu'à 4 Mc : s, il a presque disparu. De plus, la condutivité en courant continu est multipliée par 20 ou 30 à la transition supérieure.

La discussion de la méthode de préparation

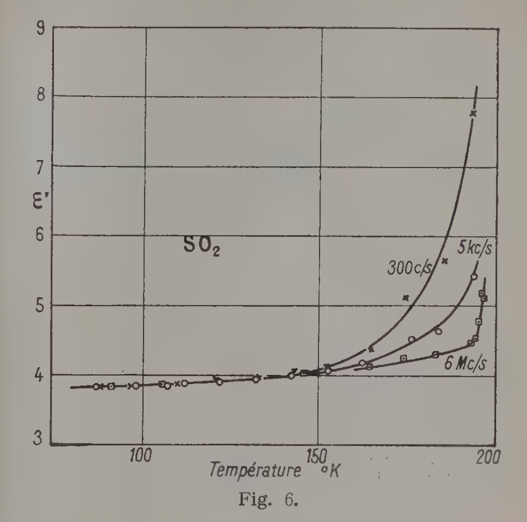


Fig. 6.

utilisée nous a conduit à admettre que l'impureté devait être SO_2. C'est pour cette raison que nous avons mesuré les propriétés diélectriques de ce corps, qui n'avait pas été étudié auparavant à l'état solide. Les variations de ε' à 300 c : s, 5 kc : s et 6 Mc : s, de 90° K à la température de fusion (200° K) sont représentées sur la figure 6. Il n'apparaît aucun point de transition dans cet intervalle de températures.

5. **HI et DI.** — Les mesures de chaleurs spécifiques faites par Clusius et Wolf ont montré que HI, ainsi que DI, prennent à l'état solide, selon la température, trois formes cristallines différentes, séparées par deux points de transition du second ordre situés aux températures suivantes :

HI (température de fusion, 222,3° K) : 70,1 et 125,68° K;
DI (température de fusion, 221,23° K) : 77,3 et 128,28° K.

Smyth et Hitchcock ont mesuré la constante diélectrique de HI entre 80° K environ et son point de fusion à diverses fréquences allant jusqu'à 60 kc : s. Ils ne trouvèrent aucune dispersion dans cette bande de fréquences. Les propriétés diélectriques de DI n'avaient pas été étudiées jusqu'ici.

Nous avons étendu ces expériences à des températures inférieures, afin d'explorer la région du premier point de transition qui se trouve juste au-dessous du point d'ébullition de l'azote liquide. Il a donc fallu travailler dans l'azote bouillant sous pression réduite. Nous avons pu étudier ainsi une

zone de températures allant approximativement de 63 à 80° K.

Certains de nos résultats sont représentés sur la figure 7. Aux températures supérieures à 80° K, les courbes $\varepsilon' = f(T)$ ont dû être obtenues pour HI et DI dans des séries spéciales d'expériences, où le refroidissement initial n'atteignait pas le premier point de transition. Il est regrettable que notre montage expérimental ne nous ait pas permis des séries continues de mesures couvrant d'un coup tout domaine de températures, car les valeurs de ε' et ε'' observées au voisinage immédiat de la température de transition dépendant de l'histoire antérieure de l'échantillon.

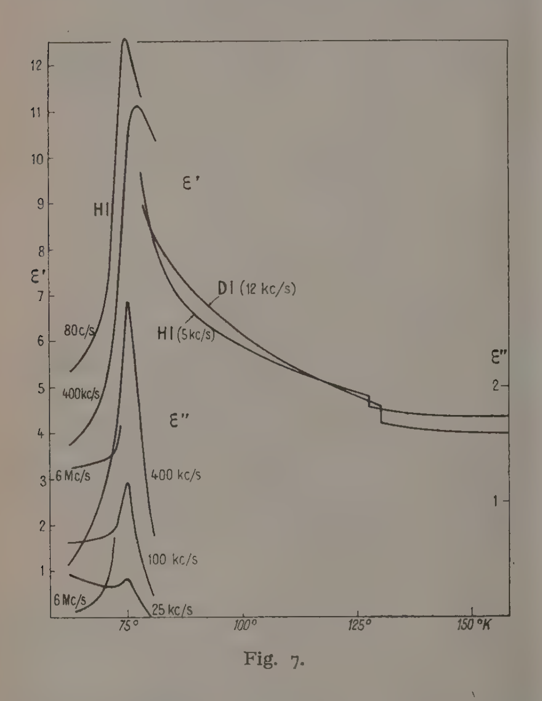


Fig. 7.

On voit sur la figure qu'aux températures situées juste au-dessus du point de transition les valeurs apparentes de ε' et ε'' sont, pour les échantillons préalablement refroidis au-dessous de ce point, légèrement supérieures à celles que l'on mesure sur les échantillons arrivant directement à ces températures, sans avoir subi la transition.

Un effet semblable fut observé par Powles dans le cas de HBr et DBr où les maxima de ε' se trouvaient dans les séries d'expériences à températures décroissantes environ 2 ou 3° plus bas qu'à températures croissantes.

Nous avons signalé une hystérésis thermique analogue pour HCl et DCl. Il est possible que ce fait explique dans une certaine mesure les valeurs de nos températures de transition (75° K pour HI) plus élevées que celles de Clusius et Wolf.

Considérons d'abord sur la figure 7 les températures supérieures au premier point de transition. Notre courbe $\varepsilon' = f(T)$ est pour HI pratiquement la même que celle de Smyth et Hitchcock, les différences restant dans les limites des erreurs expérimentales.

La courbe obtenue pour DI montre que la décroissance initiale de ε', au-dessus de la première transition, est un peu plus lente que pour HI. Mais le comportement général des deux substances est le même. Dans tout ce domaine de températures et de fréquences, les pertes sont extrêmement faibles et la constante diélectrique est pratiquement indépendante de la fréquence. Dans cette phase, ainsi que dans celle qui se trouve au-dessus du *second* point de transition, la bande de dispersion se trouve à des fréquences plus élevées que la limite supérieure de notre gamme de mesures.

Le second point de transition de DI est environ 2,5° plus haut que pour HI, comme l'avaient prévu Clusius et Wolf. La chute de la constante diélectrique en ce point paraît être un peu plus grande pour DI que pour HI.

Entre le second point de transition et une température de quelques degrés, inférieure à la température de fusion, le comportement des deux corps est de nouveau semblable; ε' est alors fonction très lentement décroissante de la température. Pour HI, entre 130 et 208° K, ε' passe de 4,50 à 4,27; pour DI :

$$\varepsilon'(130^\circ\ K) = 4,20, \qquad \varepsilon'(182^\circ\ K) = 4,03.$$

Il est intéressant de noter que nous n'avons trouvé, ni pour HI, ni pour DI aucun effet de conductivité, semblable à celui que nous avons décrit dans le cas de HCl, DCl et que l'on observe dans certains autres corps. L'influence des impuretés semble donc être dans HI et DI sensiblement plus petite que dans ces corps.

Considérons maintenant la zone des températures inférieures à la transition. Dispersion et absorption apparaissent maintenant dans notre bande de fréquence. On le voit clairement sur la figure 7 où les courbes $\varepsilon' = f(T)$, $\varepsilon'' = \varphi(T)$ n'ont été dessinées dans cette région que pour HI seulement. A cause d'une rentrée d'eau dans notre thermomètre à résistance de platine, entraînant une incertitude dans la mesure des températures, surtout d'un jour à l'autre, il nous est impossible de publier les résultats correspondants pour DI. Cependant, la comparaison des courbes obtenues en un même jour, nous permet d'affirmer avec quelque certitude que le comportement général de DI est semblable à celui de HI. La dispersion et l'absorption ont lieu à des fréquences du même ordre. Pourtant, la constante diélectrique de DI s'élève pour une fréquence donnée à une valeur

maximum légèrement inférieure à celle que l'on observe pour HI. Ainsi, à 400 kc : s,

$$\varepsilon'_{max}(HI) = 11,2, \quad \varepsilon'_{max}(DI) = 9,3.$$

Les résultats complets de nos mesures sur HI sont représentés sur la figure 8, où les courbes isothermes de $\varepsilon'(\nu)$ et $\varepsilon''(\nu)$ ont été dessinées à 63, 68, 73 et 80°,5 en se servant des courbes de la figure 7 et des courbes analogues obtenues pour d'autres fréquences.

Au-dessous du point de transition apparaît une bande de dispersion unique dont la fréquence critique est 120 kc : s à 63° K et 800 kc : s à 73° K.

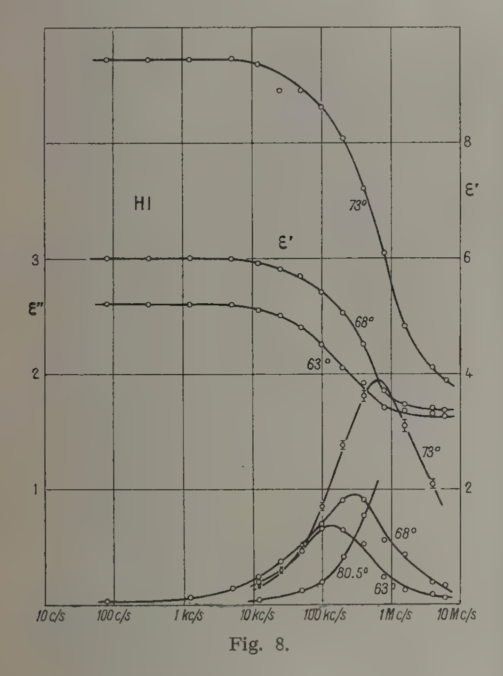


Fig. 8.

L'énergie d'activation calculée pour ce processus de relaxation est de 1,7 kcal : mol. Le « diagramme de Cole et Cole » ne révèle qu'une légère distribution des temps de relaxation (angle de dépression des centres 0-10°).

Malheureusement, il nous fut impossible d'obtenir de l'hydrogène liquide en quantité permettant de faire des séries continues à température assez basse pour que ces fréquences critiques tombent (comme on peut le prévoir) au-dessous de 1 kc : s et pour qu'on puisse ainsi chercher un second domaine de dispersion, comme on en a observé dans HBr et DBr.

Si ce domaine existe, il se trouve, entre 63° K et le point de transition, à des fréquences supérieures à 6 Mc : s. Il faut noter, d'ailleurs, que même à 6 Mc : s, ε' a une valeur très petite (3,2 à 63° K) et qu'ainsi une seconde bande de dispersion ne pourrait être que peu importante à ces températures très basses.

Revenons à la figure 7, on peut y constater que la valeur maximum que nous avons observée pour la constante diélectrique statique ε_s (à 80 c : s) est 12,6. R. H. Cole [8] a fait récemment des mesures sur HBr avec un condensateur plan à électrodes non rigides pouvant suivre les dilatations et contractions du cristal pendant que la température varie. Il a obtenu de cette manière pour ε_s des valeurs maximum beaucoup plus grandes que celles de Powles. Il est donc possible qu'il en soit de même ici et que nos valeurs maximum soient trop faibles.

Sur la figure 7, les courbes ε'' en fonction de la température présentent un maximum assez aigü à 75° K pour tomber ensuite très rapidement à toutes les fréquences. Ce fait démontre que la région de dispersion passe rapidement, quand la température s'élève, de notre bande de fréquences à des fréquences beaucoup plus élevées. C'est ce que montre aussi la figure 8 : il suffit de comparer la courbe $\varepsilon''(\nu)$ à la température de 80,5° K avec les courbes correspondant aux températures inférieures.

6. Mesures diélectriques sur DI pour les ondes de 3,23 cm. — Nous avons eu récemment la possibilité de faire un montage à 3 cm, grâce auquel on a pu déterminer ε' et ε'' par la méthode mise au point par Roberts et von Hippel [9]. Cependant, l'adaptation de cette méthode à des mesures portant sur des substances à bas point d'ébullition comporte plusieurs difficultés évidentes.

La « cellule » était constituée par une section de guide d'ondes ordinaire, scellée à un bout par une plaque métallique, sur laquelle était déposé l'échantillon à mesurer et fermée à l'autre bout par une mince fenêtre de mica. Nous avons d'abord distillé le corps étudié (iodure de deutérium) dans un tube étroit, où son volume à l'état liquide pouvait être mesuré et, de là, dans la cellule guide d'ondes.

Une manipulation préliminaire a d'abord servi à « former » l'échantillon : la cellule guide d'onde fut maintenue pendant 20 mn environ à une température un peu supérieure au point de fusion de DI, puis celui-ci fut congelé lentement, la cellule étant maintenue verticale.

Nous avons pu ainsi former une plaque cristalline à peu près plan-parallèle et reposant sur le fond métallique de guide d'ondes. Pour une détermination précise de ε' et ε'', il faudrait connaître exactement l'épaisseur de cette plaque, ce qui oblige à travailler sur 2 cm environ du corps à étudier. De plus, il faut faire la correction de variation de longueur du guide d'ondes avec la température, correction qui peut être relativement grande lorsque le volume de l'échantillon soumis aux mesures est petit ou lorsque sa constante diélectrique est faible.

Les résultats suivants, qui concernent DI, doivent être considérés comme préliminaires.

Le premier essai, qui fut effectué dans un large intervalle de températures s'étendant de 75° K environ à quelques degrés au-dessus du point de fusion nous montra que pour une longueur d'ondes voisine de 3 cm, DI se comporte tout autrement qu'aux basses fréquences. *Au second point de transition*, au lieu de la faible chute soudaine de ε' trouvée aux basses fréquences, on observe à 3 cm un *accroissement* relativement lent de la constante diélectrique ε', phénomène qui s'accompagne d'un *maximum* important de la constante de pertes ε''.

Une seconde série de mesures fut faite avec des précautions plus minutieuses, en laissant monter très lentement la température.

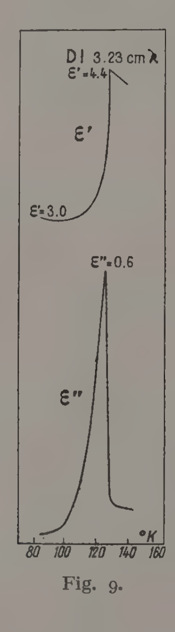


Fig. 9.

Les courbes obtenues ainsi pour ε' et ε'' de DI (en unités arbitraires) sont représentées sur la figure 9. Les valeurs absolues calculées pour ε' et ε'' à l'aide des deux séries de données expérimentales diffèrent de 15 à 25 pour 100. Les valeurs moyennes indiquées sur les courbes doivent donc être considérées comme de simples indications.

Une comparaison des figures 7 et 9 montre que, pour la deuxième phase stable entre les deux points de transition, la région de dispersion se situe à des longueurs d'ondes nettement supérieures à 3 cm, tandis que pour la troisième phase stable entre le second point de transition et la fusion, la région de dispersion paraît se trouver à des longueurs d'ondes sensiblement inférieures.

La forme des courbes de la figure 9 montre quelque ressemblance avec celle des diagrammes obtenus à fréquences plus basses au premier point de transition. Quand on dépasse la seconde transition, la décroissance de la constante diélectrique continue uniformément jusqu'à la fusion ou se produit une très légère remontée de ε' (de 3,9 à 4,0). Sauf au voisinage du second point de transition, les pertes mesurées sont nulles à toutes les températures.

7. **Conclusions.** — 1° Nos expériences montrent une fois de plus, la nécessité de travailler, dans une gamme de fréquences aussi étendue que possible. Les courbes de la constante diélectrique, en fonction de la température, peuvent avoir une allure tout à fait différente dans le domaine des micro-ondes qu'aux basses fréquences. De plus, la découverte d'un domaine de dispersion aux fréquences inférieures à 80 c : s, dans la phase stable aux plus basses températures pour HCl et DCl, met en évidence qu'il est dangereux de supposer que la constante diélectrique observée pour des fréquences de cet ordre est nécessairement égale à la constante statique. Il est assez rare, que des expériences diélectriques aient été faites à des fréquences inférieures à environ 50 c : s et il est possible qu'une constance apparente de ε', en fonction de la fréquence, cache un domaine de dispersion localisé en des fréquences plus basses.

2° En outre, il serait nécessaire d'étudier de plus près l'influence des impuretés, d'abord en se servant de substances hautement purifiées, puis en travaillant systématiquement sur des mélanges. En effet, nous ne savons pas encore pour quelles raisons l'influence des impuretés est dans certains cas beaucoup plus notable que dans d'autres, ni pourquoi ces impuretés peuvent produire, par exemple, un point de transition supplémentaire comme nous l'avons trouvé pour le mélange $DCl\text{-}SO_2$. Il est possible que des recherches de ce genre nous permettent un jour de mieux comprendre les transitions elles-mêmes. En tout cas, il semble que les impuretés n'affectent les propriétés diélectriques des halogénures qu'à des températures supérieures au premier point de transition.

3° Les expériences de Powles sur HBr et DBr ont révélé aux températures inférieures à la première transition l'existence de deux bandes de dispersion. La valeur maximum de la constante des pertes ε''_{max}, dans la bande de dispersion à basse fréquence de ces corps varie très peu avec la température, tandis que ε' croît rapidement dans toute la gamme des basses fréquences. Au contraire, nous avons observé pour HI un accroissement beaucoup plus rapide de ε''_{max} avec la température, accroissement conforme à ce que fait prévoir la variation de ε' aux basses fréquences.

Powles expliqua les effets qu'il observa sur HBr et DBr en admettant que, dans ce cas, l'accroissement rapide de ε' est dû surtout à une soudaine augmentation de l'amplitude des phénomènes, qui

déterminent la zone de dispersion *à haute fréquence.* Il semblerait donc que, dans HI, cette zone de dispersion à haute fréquence aurait moins d'importance que dans HBr et DBr. Son existence semble néanmoins certaine, du moins entre les deux points de transition, puisqu'à 80° K, pour DI, ε' reste en moyenne fréquence, voisin de 6,5 et tombe aux environs de 3 pour les ondes de 3,23 cm.

Faisons d'abord abstraction de ce premier point de transition de HI et DI, où les difficultés expérimentales (températures très basses, position des bandes de dispersion dans une région spectrale d'accès difficile) nous ont empêchés de débrouiller complètement les phénomènes :

Tous les autres cas (transformation du premier ordre de HCl et DCl, premier point λ de HBr et DBr, second point λ de DI) obéissent à une loi générale qui doit avoir, au moins pour la série des halogénures d'hydrogène et de deutérium cristallisés, une signification physique profonde.

Qu'il s'agisse de points λ ou de changements allotropiques du premier ordre, toutes ces transitions se manifestent par la disparition brusque d'une bande de dispersion à fréquence critique relativement basse, accompagnée de l'augmentation rapide d'intensité d'une bande à fréquence critique plus élevée. Dans chaque série de bandes, la fréquence critique croît quand on passe du chlorure au bromure, puis à l'iodure; en même temps, la température de transition s'abaisse.

Il semble néanmoins que la discontinuité soit plus importante et plus compliquée dans le cas de HCl (*fig.* 2 et 3).

Quant au premier point λ de HI et DI, nous avons bien observé au moment de la transition, une diminution soudaine d'intensité de l'absorption (de ε'') aux basses fréquences et un accroissement rapide aux fréquences élevées, sans pouvoir affirmer s'il s'agit, comme dans les autres cas, de la disparition brusque d'une bande.

De nouvelles expériences sont nécessaires, notamment aux second et troisième point λ de HBr et pour HI et DI dans le domaine des ondes décimétriques, afin de vérifier si la loi que nous venons d'énoncer est vraiment générale dans la série des halogénures, afin de voir si l'on peut caractériser plus nettement, du point de vue diélectrique, les transitions du premier et du second ordre et s'il existe dans ces corps deux ou trois fréquences critiques distinctes et dans quels domaines de températures elles sont observables.

Ces recherches ont été faites au Laboratoire de Chimie Physique de la Faculté des Sciences de Paris.

Je suis profondément reconnaissant à M. le Professeur Bauer et à M. M. Magat pour les conseils qu'ils m'ont constamment prodigués.

Je tiens à remercier le C.N.R.S. et l'Université de Londres, qui m'ont accordé une bourse d'échange pour les années 1949-1950 et 1950-1951.

Manuscrit reçu le 13 décembre 1951.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Smyth. — *Trans. Faraday Soc.*, 1946, **42** A', 175.
[2] Clusius et Wolf. — *Z. Naturf.*, 1947, **9**, 495.
[3] Powles. — *J. Physique*, 1952, **13**, 121.
[4] Cone, Dennison et Kemp. — *J. Amer. Chem. Soc.*, 1931, **53**, 1278.
[5] Smyth et Hitchcock. — *J. Amer. Chem. Soc.*, 1933, **55**, 1830.
[6] Daniel et Stark. — *Trans. Faraday Soc.*, 1951, **47**, 149.
[7] Phillips. — *Nature*, 1951, **168**, 518.
[8] Cole, R. H. — Communication au Congrès de Liverpool, juillet 1952.
[9] Roberts et von Hippel. — *J. Appl. Phys.*, 1946, **17**, 610; Westphal. — *Techn. Rep.*, **36**, Laboratory for insulation research M. I. T.

EXPOSÉS ET MISES AU POINT BIBLIOGRAPHIQUES

LES PROBLÈMES RELATIFS A LA ROTATION DANS LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ

Par ANDRÉ METZ.

Sommaire. — Les problèmes de rotation n'ont pas fait jusqu'ici, du point de vue relativiste, l'objet d'études d'ensemble détaillées; ils ont seulement été abordés ou traités partiellement dans des Mémoires ou des Notes (qui pouvaient présenter tous les défauts de l'improvisation) à propos d'expériences effectivement faites, ou de dispositifs proposés à titre de questions théoriques.

Le présent article vise à combler cette lacune.

Ces problèmes exigent, en Relativité, l'emploi des notions connues de *temps propre* et de *longueur propre* et, en outre, de la notion de *temps d'un solide le long d'une courbe décrite sur ce solide*, temps qui dépend de cette courbe et de la manière dont elle est décrite.

Le problème des deux mobiles circulant en sens inverse sur le pourtour d'un disque est d'abord traité de manière rigoureuse, à titre de premier exemple fixant les ordres de grandeur des effets à observer et les possibilités de résultats « cruciaux » entre la théorie de la Relativité et la Mécanique classique.

Les expériences effectuées jusqu'ici sont ensuite examinées en détail : d'abord la plus simple, celle de Sagnac, où deux rayons lumineux décrivant en sens inverse (dans l'air) un circuit polygonal entraîné par un disque mobile, se rejoignent et forment des interférences; puis l'expérience de Harress, où un circuit du même genre est décrit par la lumière dans des prismes réfringents; enfin, celles de Dufour et Prunier qui, partant du dispositif de Sagnac, en varient les conditions de plusieurs manières et notamment en introduisant des parcours dans des milieux réfringents fixes, ou en combinant des portions de trajet fixes avec des portions entraînées avec le disque.

Toutes ces expériences mettent en évidence des effets du « premier ordre » en $\frac{v}{c}$. Elles ont généralement été considérées d'abord par leurs auteurs comme des preuves de la théorie de l'éther. En réalité, elles sont interprétées aussi bien dans la Théorie de la Relativité, et sans aucune hypothèse auxiliaire (comme celle de l' « entraînement partiel de l'éther par la matière réfringente », suivant la formule de Fresnel). Les démonstrations données ci-dessous sont presque toutes originales; plusieurs d'entre elles sont inédites.

1. **L'extension aux mouvements de rotation de la « Relativité restreinte ».** — Les problèmes concernant les mouvements non rectilignes ne sont pas examinés dans la *Relativité restreinte* proprement dite : ils constituent une « généralisation » de cette théorie, qui nécessite des considérations particulières et forme transition avec la *Relativité généralisée.* C'est, en effet, après avoir établi que la géométrie d'un disque en rotation *n'est pas euclidienne* pour des observateurs entraînés avec le disque — c'est le « paradoxe d'Ehrenfest » — qu'Einstein a étendu ce résultat, en vertu du « principe d'équivalence », au cas des champs de gravitation [1].

Il convient d'insister sur la signification de ce « paradoxe » et sur le problème général du disque tournant, avant de pouvoir résoudre les questions posées à la sagacité des physiciens au sujet des corps en rotation par des expériences réelles ou fictives et par des discussions qui n'ont guère cessé depuis une trentaine d'années.

Ces questions ont, jusqu'ici, été traitées, au point de vue relativiste, assez rapidement, par des savants surtout préoccupés d'aller de l'avant et qui laissaient parfois dans l'ombre des points délicats. Le moment semble venu d'introduire le maximum de clarté et de rigueur dans un domaine jusqu'ici quelque peu négligé à cet égard.

Les formules de la Relativité restreinte ont été établies en supposant des mouvements de translation uniforme. Elles peuvent être étendues aux cas des mouvements variés (dont font partie les mouvements de rotation) à condition de diviser ces mouvements en éléments spatio-temporels correspondant à des distances infiniment petites et des temps infiniment courts, auxquels on applique les formules de Lorentz et en faisant ensuite des sommations des résultats obtenus.

Rappelons que l'on appelle *longueur propre* d'un élément linéaire faisant partie d'un solide la longueur telle qu'elle est mesurée par un observateur opérant avec des règles graduées immobiles par rapport à ce solide.

D'une façon analogue, on appelle *temps propre* d'un mobile le temps tel qu'il est mesuré par une horloge parfaite entraînée avec ce mobile. C'est l'intégrale des temps élémentaires correspondant aux mouvements successifs de ce mobile.

On sait que, dans le cas d'un mobile, l' « intervalle d'univers » ds est égal à $c\,dt$, t étant l'intervalle de temps correspondant dans un système de référence lié au mobile. Sur un parcours déterminé,

$$\int dt = \frac{1}{c}\int ds;$$

c'est-à-dire que le temps propre est égal à l'arc de « ligne d'univers » divisé par la vitesse de la lumière.

2. Le problème général du disque en rotation [2]. — Considérons un disque D en rotation par rapport à un système de Galilée S et soit v sa vitesse circonférentielle. Un observateur entraîné avec D dispose de règles graduées très courtes par rapport au diamètre du cercle : en mettant ces règles bout à bout le long du pourtour du disque, il le recouvre entièrement au moyen de l' règles de longueur unité. Si un observateur de S fait de cette figure une photographie instantanée (par rapport à S), il trouve, pour la longueur totale, la valeur $2\pi r$. Mais en faisant cette opération, il a attribué à chacune des petites règles la longueur « contractée » $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Donc

$$l'\sqrt{1-\frac{v_2}{c_2}}=2\pi r \qquad \text{et} \qquad \frac{l'}{2r} \text{ est } > \pi.$$

On a admis implicitement, dans ce raisonnement, que le disque était plein et sans fissure à la vitesse considérée. Le résultat obtenu montre que si un disque de rayon constant passe de l'immobilité à la rotation dans un système de Galilée en restant sans fissure, *il faut que sa circonférence s'allonge* (mesurée en « longueur propre ») et si, au contraire, on assujettit chacun des éléments du pourtour du disque à garder, malgré le mouvement, la même longueur propre, *il faut que le disque craque.*

Cette dernière assertion est rendue plus évidente encore par les considérations suivantes : Soit une voie circulaire de grand rayon, sur laquelle se trouvent un grand nombre n de wagons de longueur unité, attachés ensemble, sauf le $n^{\text{ième}}$ qui n'est pas attaché au premier, de sorte qu'ils forment une chaîne circulaire ouverte. Supposons qu'au repos, le $n^{\text{ième}}$ touche le premier. Mettons le train en marche instantanément à la vitesse v sans changement de longueur propre [1] : cela veut dire que le premier et le deuxième wagon se mettent en mouvement *simultanément* par rapport au premier wagon ayant la vitesse v; que le troisième se met en mouvement *simultanément* avec le deuxième, par rapport à celui-ci ayant acquis la vitesse v, etc., jusqu'au $n^{\text{ième}}$.

On voit alors qu'il se produit un intervalle entre le $n^{\text{ième}}$ et le premier.

En effet, le phénomène, vu de la voie, produit la même impression que dans le cas d'un train en marche *instantanément* à une vitesse v sur une voie rectiligne et sans changer de longueur propre (l'instantanéité étant réalisée par rapport au train à la vitesse v) [2] pour le système de référence de la voie, le mouvement paraît se propager de l'arrière du train vers l'avant — en même temps que se produit la contraction lorentzienne sur chaque wagon — de sorte que le wagon de queue est déjà parti depuis un certain temps *au moment où* (par rapport à la voie) le wagon de tête se met en marche. A partir de là, la longueur du

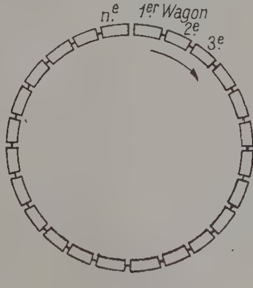


Fig. 1.

train, mesurée par rapport à la voie, reste constante si la vitesse v reste la même.

Cet intervalle est, mesuré par rapport à la voie,

$$n\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right);$$

mesuré en unités entraînées avec le train, il est

$$n\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right).$$

Pour revenir au cas du disque tournant, retenons le rapport de la circonférence au rayon qui, mesuré par des observateurs entraînés avec le disque, est

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \text{donc} \quad > 2\pi.$$

On en a parfois déduit que le rayon devrait se contracter. Il en serait ainsi, en effet, dans le cas d'une *roue* dont les rayons seraient élastiques ou

(1) Cela exige que tous les wagons soient automoteurs et soient mis en marche suivant un programme préétabli, car le mouvement ne peut se transmettre d'un wagon à un autre *instantanément* si l'on compte uniquement sur des véhicules (locomotive, ou voitures motrices) pour entraîner les autres. En outre, cela exige que tous les wagons soient munis d'un dispositif compensateur de longueur que l'on fait fonctionner suivant un programme préétabli, autrement les wagons ne pourraient garder leur longueur propre pendant la mise en marche (celle-ci ne pouvant se faire instantanément d'une extrémité à l'autre).

A noter que le wagon que nous appelons le « premier » (il est effectivement le premier mis en marche pour le système de référence de la voie) est, dans le sens de la marche, à l'arrière du train. En termes ferroviaires, c'est le wagon de queue (et non le wagon de tête) et tout se passe, pour la voie, comme si la rame était *refoulée*, avec compression des voitures réduisant la longueur totale du train.

Mais on doit insister sur le fait que c'est l'exécution du programme (horaire établi et exécuté à une fraction infinitésimale de seconde près) qui, aidée par la manœuvre des dispositifs compensateurs, produit ce résultat et non l'action des attelages, qui pourraient être supposés inexistants.

(2) La constance de la longueur propre est obtenue par les mêmes artifices que dans la Note précédente. Le mouvement paraît se propager de l'arrière vers l'avant avec la vitesse $\frac{c^2}{v}$ pour les observateurs de la voie.

Une différence importante existe entre le cas de la voie circulaire et celui de la voie rectiligne : dans ce dernier cas, les wagons partent *ensemble* pour un système de Galilée (le système en translation avec une vitesse v), tandis qu'il est impossible de trouver un tel système pour une voie circulaire.

plastiques, c'est-à-dire susceptibles d'extension et de contraction, tandis que la jante, au contraire, serait extrêmement rigide, possédant une cohésion parfaite et une aptitude à conserver ou à reprendre toujours et, malgré tout, la même *longueur propre*.

Mais, lors même que ces conditions seraient supposées réalisées, il faudrait considérer cette contraction séparément, *avant* de traiter le problème par les formules de la Relativité (de même si l'on voulait tenir compte d'une *extension* mécanique due, par exemple, à la force centrifuge).

En effet, ces formules stipulent que les éléments perpendiculaires au mouvement restent inaltérés.

Si le rayon est constant et si la cohésion de la matière du disque l'empêche de se fissurer, il y a, pour tous les éléments de cette matière, du fait de la rotation, une *contrainte* dont l'effet est une *extension de longueur propre* dans le sens perpendiculaire au rayon, dans la proportion $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, v étant la vitesse de l'élément considéré.

3. **Remarques générales au sujet des problèmes de rotation.** — On peut tirer des considérations qui précèdent les remarques suivantes :

a. D'une façon générale, un solide ne peut conserver une parfaite rigidité dans des mouvements *variés*, selon la théorie de la Relativité. C'est pourquoi les problèmes qui font intervenir ces mouvements doivent comporter, dans leurs énoncés, des détails, notamment au sujet des cohésions, des rigidités imposées, des contractions ou extensions permises, détails qui n'étaient pas exigés dans la Mécanique rationnelle classique.

b. Les « extensions » et « contractions » des longueurs et des durées, qui sont toutes « relatives » et parfaitement réciproques tant qu'il est question de translations uniformes, prennent, dans certains cas de mouvements variés, une réalité indéniable, se traduisant notamment par des différences de longueurs ou des déréglages temporels lors de rencontres (qui sont des « coïncidences spatiotemporelles », donc des réalités indéniables dont doit tenir compte toute théorie).

On sait depuis longtemps que les mouvements variés peuvent être mis en évidence par des phénomènes physiques mesurables à l'intérieur même des systèmes en mouvement (par exemple, les effets de la « force centrifuge » pour les rotations), et la célèbre expérience du pendule de Foucault a montré que l'on pouvait ainsi mettre en évidence la rotation de la terre. La théorie de la Relativité affirme, en outre, que des *décalages spatiaux* et *temporels* peuvent être liés à des mouvements variés et, en particulier, à des rotations.

c. Une des plus grandes difficultés des solutions des problèmes de rotation est l'impossibilité de définir un temps univoque et cohérent, au moyen d'horloges liées au corps en rotation considéré [1].

Certes, chaque point de ce corps — disons : du « disque » — a son temps propre. D'autre part, tout mobile qui parcourt un trajet par rapport au disque a également son temps propre.

Mais on peut définir aussi (et c'est encore une notion différente) un *temps du disque, le long de ce trajet*. En effet, le mobile a, à chaque instant, une certaine position par rapport au disque; pendant un intervalle de temps élémentaire (défini par rapport au système de Galilée), il parcourt une distance infiniment petite et nous pouvons appliquer les formules de transformation de Lorentz à ce mouvement. On trouve ainsi un *temps* élémentaire du disque (en même temps qu'une distance sur ce disque et une vitesse par rapport au disque) (³) et en faisant une sommation, on peut définir le temps le long du trajet. Ce temps dépend, en général, non seulement du trajet parcouru, mais encore de la façon dont il est parcouru (nous en avons vu un exemple à propos des wagons sur la voie circulaire).

4. **Méthodes de résolution des problèmes.** — *Possibilités de différences entre la théorie classique et la Relativité.* — Un certain nombre de problèmes ont été posés concernant des disques tournants à la suite d'expériences effectivement faites, ou projetées, ou simplement envisagées. Toutes ces expériences avaient d'abord été considérées par leurs auteurs comme cruciales entre la Relativité et la théorie « classique » (théorie de l'éther, avec application de la Cinématique classique).

Toutes concernent des mouvements de mobiles ou des propagations d'ondes, qui ont lieu sur des disques animés de mouvements de rotation.

Les problèmes correspondants peuvent être traités par plusieurs méthodes :

1° Les raisonnements et les calculs ont lieu dans le système de référence de Galilée initial, celui du laboratoire.

Cette méthode a l'avantage d'utiliser toujours un temps univoque et cohérent; mais elle peut, dans certains cas, suivant les données du problème posé, se révéler inapplicable ou donner lieu à des complications telles qu'il devient préférable d'en employer une autre.

2° Les raisonnements et les calculs ont lieu en considérant des éléments du disque, que l'on prend successivement comme référence. On est alors conduit à introduire le « temps du disque le long d'un trajet », défini ci-dessus (§ 3, *c*).

Cette méthode, qui s'impose pour certains problèmes, est plus délicate en raison de la nécessité de

(³) Certains auteurs ont introduit des « vitesses par rapport au disque » considérées dans des systèmes de référence (ou « vues par des observateurs ») qui ne participent pas au mouvement du disque. Ces « vitesses » s'obtiennent par addition ou soustraction (sans tenir compte de la formule de composition) des vitesses considérées : vitesse du mobile (ou de la propagation envisagée) par rapport au système de référence en question et vitesse du point du disque correspondant, toujours par rapport au même système de référence. C'est ainsi que l'on peut avoir, dans certains cas, une propagation de la lumière « anisotrope » et même une vitesse de la lumière plus grande que c.

Naturellement, il convient de bien préciser, lorsqu'on l'emploie, cette notion de vitesse à double référence, qui semble, au premier abord, jurer avec les notions et les résultats admis en Relativité. Nous n'avons pas eu à l'utiliser dans le présent travail.

manier des temps différents les uns des autres et dont certains peuvent être des résultats d'intégrations de caractère peu commun.

Ces deux méthodes sont les principales qui aient été employées jusqu'ici pour les problèmes en question. Bien entendu, rien n'empêche d'en employer d'autres et notamment de choisir d'autres systèmes de référence, ou de passer d'une méthode à une autre au cours du même problème.

Certains auteurs ont publié, à propos d'expériences célèbres, des raisonnements et des calculs tenant compte du temps du système du laboratoire et de coordonnées d'espace mesurées sur le corps en mouvement, d'ailleurs sans tenir compte du radical $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ correspondant à la « contraction » [3], ([3]). C'est là proprement *raisonner dans la théorie de l'éther* et les résultats obtenus par cette « troisième méthode » ne peuvent être donnés comme conformes à la Relativité qu'avec les justifications nécessaires.

Quelle que soit la méthode employée, une différence entre les résultats prévus par la Relativité et par la théorie classique ne peut provenir que des *formules de transformation* d'un système de référence à un autre, formules utilisées pour les calculs partant de données (positions, temps, vitesses) évaluées dans un système et aboutissant à des éléments évalués par rapport à un autre système.

Aucune différence n'est donc possible si tout — données et résultats — se calcule dans le même système (nous verrons plus loin que c'est le cas pour certaines expériences).

Il faut d'ailleurs remarquer que si les propagations en cause sont des propagations de lumière dans le vide ou dans l'air, les applications des deux théories, tout en demandant des calculs qui peuvent être différents, sont forcément *équivalentes au premier ordre* (par rapport à la vitesse du disque). Si donc on ne peut pas pousser très loin la précision expérimentale (comme cela a été le cas jusqu'ici pour toutes les expériences concernant des rotations), elles aboutissent aux mêmes résultats observables.

Ceci est d'ailleurs général, quel que soit le corps considéré (qui n'est pas forcément un disque) et son mouvement (qui n'est pas forcément une rotation).

En effet, si d'après la théorie classique une onde lumineuse parvient, au temps origine, en un point M de ce corps et si nous choisissons des coordonnées telles que l'axe des x soit dans la direction de la vitesse v du point M, la vitesse de cette onde est un vecteur qui a pour grandeur c et pour projections c_x, c_y, c_z. Sa vitesse par rapport au corps considéré (toujours dans la théorie classique) a pour composantes $c_x - v$, c_y, c_z; sa grandeur n'est plus c, mais celle de la « résultante » des deux vecteurs vitesse (de grandeurs c et v). Au bout du temps élémentaire dt, la même onde arrivera au point dont les coordonnées, par rapport au corps en mouvement, sont

$$dt(c_x - v), \qquad dt\,c_y, \qquad dt\,c_z.$$

D'après la Relativité, au bout du même temps dt du système galiléen du laboratoire, cette onde arrivera au point dont les coordonnées, par rapport au corps considéré, sont

$$dx' = dt\,\frac{c_x - v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad dy' = dt\,c_y, \qquad dz' = dt\,c_z;$$

le temps est noté de façon différente

$$dt' = dt\,\frac{1-\frac{vc_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

et l'on a

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = c^2\,dt'^2,$$

c'est-à-dire que la vitesse de la lumière a pour grandeur c par rapport au corps considéré (même grandeur que dans le système de Galilée).

Si nous comparons ces résultats à ceux de la théorie classique, nous voyons que, par rapport au corps en mouvement, la *vitesse de la lumière* et le *temps* ont des valeurs très différentes dans les deux théories. Mais le point où arrive la lumière est le même et est noté de la même façon au point de vue des coordonnées d'espace, si l'on néglige le terme du second ordre $\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$, qui correspond à la « contraction de Lorentz ».

Ce sont donc, au premier ordre, les *mêmes événements* qui sont notés dans la théorie de l'éther avec le temps t « universel » et la vitesse de la lumière modifiée (« composée » avec la vitesse du corps suivant la règle classique) et dans la théorie relativiste avec le temps t' du système de référence entraîné par ce corps et la vitesse de la lumière « invariante ».

Une sommation de résultats élémentaires de ce genre le long d'un trajet ne peut rien changer dans l'ensemble.

Finalement, les mêmes effets sont prévus sur le corps en mouvement, en ce qui concerne la lumière dans le vide ou dans l'air — toujours *au premier ordre* — par les deux théories, mais ils sont attribués par la théorie classique aux différences des vitesses de la lumière et par la théorie de la Relativité à la modification du temps lui-même.

Cette convergence des résultats des deux théories ne s'applique qu'à la vitesse c.

Elle n'est déjà plus valable pour les vitesses de la lumière dans les corps réfringents, qui sont nettement plus petites que c. La théorie classique doit alors faire appel à l'hypothèse de l' « entraînement partiel » de l'éther ([5]) pour expliquer les phénomènes observés dans ces corps. Moyennant cette hypothèse auxiliaire, la convergence est rétablie.

Il n'y aurait aucune convergence pour des vitesses de mobiles, ou des propagations, *différentes de la lumière*, et des expériences faites sur cette base

([3]) *Voir* plus loin (chap. VIII) à propos de l'interprétation de l'expérience de Sagnac.

([5]) Rappelons que cette hypothèse, émise par Fresnel à la suite d'expériences d'Arago, était déjà une introduction partielle de la Relativité, car elle consistait essentiellement à légaliser l'impossibilité constatée de mettre en évidence le « vent d'éther » par des expériences du premier ordre sur les corps réfringents.

On sait que les formules de Fresnel ont été vérifiées ensuite par d'autres expériences réalisées par Fizeau.

pourraient être cruciales si elles pouvaient être montées de façon à donner des résultats accessibles aux mesures de laboratoire.

5. **Cas des mobiles circulant sur la circonférence du disque.** — On peut considérer comme problème typique de ce genre celui qui a été posé par F. Prunier [4] : deux mobiles, partant d'un même point O′ sont supposés circuler en sens inverse sur le pourtour d'un disque, à des vitesses égales par rapport à ce disque. Si celui-ci est immobile par rapport à un système de Galilée, les rencontres successives des mobiles ont toujours lieu en ce même point O′ du disque (et au point de la circonférence diamétralement opposé).

Si le disque est animé d'un mouvement de rotation autour de son centre, les rencontres ont toujours lieu au même point O′ du disque d'après la Cinématique classique. D'après la théorie de la Relativité, ils se rencontrent, après un tour chacun, en un point O'_1 différent de O′, puis, après deux tours, en un autre point O'_2 différent de O'_1, etc.

P. Langevin a donné l'essentiel de la théorie relativiste de ce problème [5] et le calcul approximatif du retard d'un des mobiles sur l'autre.

Cette théorie peut être faite en se plaçant dans le

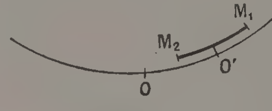


Fig. 2.

système de Galilée, c'est-à-dire en appliquant la « première méthode » (§ 4) [6]. A noter qu'il ne s'agit pas de propagation lumineuse et l'ordre de grandeur de la vitesse des mobiles n'est pas donné *a priori*. Il y a donc lieu d'être extrêmement prudent dans les « approximations » quelles qu'elles soient. La méthode employée permet ici un calcul tout à fait rigoureux.

Soit O le point de départ des mobiles dans ce système : O′ coïncide, à l'origine des temps, avec O; il se meut ensuite avec une vitesse u (vitesse circonférentielle du disque) par rapport au point O. Soit v' la vitesse du premier mobile M_1 par rapport au disque. Ce mobile a, par rapport au système de Galilée, la vitesse

$$v_1 = \frac{u + v'}{1 + \frac{uv'}{c^2}}.$$

Le second mobile M_2 a, par rapport au disque, la vitesse $-v'$ et, par rapport au système de Galilée, la vitesse

$$v_2 = \frac{u - v'}{1 - \frac{uv'}{c^2}}.$$

Il y aura une nouvelle rencontre des mobiles lorsque la différence des parcours des deux mobiles sera l, ou $2l$, ou $3l$, etc. (l étant la longueur de la circonférence.

La différence l correspond à la première rencontre, au voisinage du point diamétralement opposé à O′. La différence $2l$ correspond au point O'_1.

Cette rencontre aura lieu au temps t du système S, tel que

$$v_1 t - v_2 t = 2l,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{u + v'}{1 + \frac{uv'}{c^2}} - \frac{u - v'}{1 - \frac{uv'}{c^2}}\right) t = 2l.$$

Après simplifications et résolution par rapport à t, on trouve

$$t = \frac{l}{v'} \frac{1 - \frac{u^2 v'^2}{c^4}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Le mobile M_1 a parcouru alors, au total, le chemin $v_1 t$ dans le système S; le mobile M_2 a parcouru $v_1 t - 2l$. Leur point de rencontre O'_1 est donc à la distance de O (mesurée le long de la circonférence) $v_1 t$, ou $v_1 t - l$, ou $v_1 t - 2l$, etc. et sa distance au point O′ (dont la distance au point O est ut) est

$$v_1 t - ut \quad \text{ou} \quad v_1 t - l - ut \quad \text{ou} \quad v_1 t - 2l - ut, \quad \ldots.$$

C'est évidemment la seconde qui donne la valeur absolue la plus faible.

Soit

$$d = O'O'_1 = v_1 t - l - ut.$$

Le calcul donne, après simplifications,

$$d = -l \frac{uv'}{c^2}.$$

Cette formule appelle les remarques suivantes :

Si u (vitesse circonférentielle du disque) peut être regardée comme *très petite* par rapport à c et si v' (vitesse des mobiles sur le disque) est également *très petite*, l'effet est du second ordre.

Il n'en est pas de même si, dans des expériences analogues, on remplace les mobiles par des effets de propagation dont la célérité est de l'ordre de la vitesse de la lumière.

Mais, comme on l'a vu, dans le cas de la lumière elle-même, les expériences ne sont pas cruciales [5].

D'autre part, il est très difficile de réaliser des mouvements très rapides avec des mobiles matériels proprement dits. On se trouve alors dans le dilemme suivant : ou bien (cas de la lumière) les expériences sont moins intéressantes, ou bien (cas des mobiles matériels) la vitesse v' est très petite vis-à-vis de c et l'effet est du second ordre, donc très difficilement observable.

M. Prunier a étudié différents projets visant à remplacer les mobiles par des propagations de courants électriques ou par des propagations d'ultrasons sur le pourtour d'un disque tournant à très grande vitesse. La mise au point de ces expériences suscite de grosses difficultés. Il serait grandement désirable que ces difficultés puissent être surmontées, pour que l'on puisse disposer du témoignage d'expériences proprement cinématiques et ne dépendant pas de la lumière.

[5] Comme on ne peut pas faire parcourir à la lumière une circonférence, on remplace celle-ci par un trajet polygonal (c'est le cas des expériences décrites plus loin), mais les résultats sont les mêmes au point de vue des ordres de grandeur

6. Le problème des disques avec engrenages. — Alexandre Dufour avait imaginé un dispositif qui devait, dans sa pensée, être équivalent à celui du disque avec deux mobiles circulant en sens inverse [7], [8], [9] :

Un disque horizontal D porte et entraîne avec lui un moteur qui fait tourner d'un mouvement uniforme, autour d'un axe horizontal (fixe par rapport à D), un pignon denté E. Celui-ci engrène avec deux couronnes dentées horizontales entre lesquelles il est placé et qui sont solidaires de deux disques D_1 et D_2 mobiles autour du même axe que le plateau D.

A. Dufour pensait réaliser ainsi l'égalité des vitesses, par rapport au plateau D, des éléments des pourtours des deux disques D_1 et D_2.

P. Langevin a montré qu'il n'en était rien d'après la Cinématique relativiste [10]. En effet, les disques étant supposés sans fissures à leurs vitesses respectives, il faut qu'ils subissent les extensions prévues plus haut : les éléments du pourtour du disque D_1

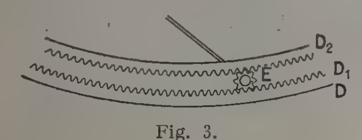


Fig. 3.

subissent donc, en longueur *propre*, une extension dans la proportion $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}$; ceux du disque D_2 dans la proportion $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}$.

En raison de l'existence des engrenages, chaque fois que D_1 avance d'une dent sur le pignon E, D_2 recule d'une dent, c'est-à-dire d'une même fraction de circonférence. Au bout de n opérations de ce genre (n étant le nombre de dents de chaque couronne), les dents primitivement en contact avec le pignon reviennent donc au contact. Les rencontres successives de points tels que M_1 et M_2 marquées respectivement sur les couronnes D_1 et D_2 doivent donc toujours se faire au-dessus des mêmes points de D (7).

D'autre part, les vitesses mesurées par des observateurs de D (aux environs du pignon E, par exemple) des points de D_1 et de D_2 sont *différentes*. Leur rapport est, d'après P. Langevin, $\frac{1-\frac{uv_1}{c^2}}{1-\frac{uv_2}{c^2}}$.

On se trouve donc dans un cas nettement différent de celui des problèmes précédents.

Une difficulté signalée par F. Prunier [9] résulte du passage à la limite lorsque les disques augmentent de rayon sans changer les vitesses circonférentielles (8). Le rapport précédent (entre les vitesses mesurées par l'observateur en E) ne dépend que de u, de v_1 et de v_2. Il demeure donc constant lorsque le rayon varie.

A la limite, la rotation devient une translation. Devra-t-on dire que cet observateur pourra ainsi mettre en évidence son mouvement de translation ? Ce serait une conséquence directement opposée au principe même de Relativité.

En réalité, ce que décèle l'observateur, ce n'est pas son mouvement, ce sont les extensions des dimensions propres de D_1 et D_2, ou plus exactement le fait que ces extensions sont différentes.

Supposons qu'avec les mêmes vitesses circonférentielles on remplace les disques avec engrenages par d'autres de plus en plus grandes, puis par des secteurs dentés de grands rayons, enfin par des engrenages rectilignes. *Si l'on maintient les extensions précitées*, la relation de Langevin subsiste et l'observateur en E continue à constater une différence entre la vitesse (mesurée par lui) des engrenages supérieur et inférieur. Mais ce n'est pas son mouvement qu'il met ainsi en évidence.

Cependant, ces extensions ne s'imposent nullement dans le cas des engrenages rectilignes (ni même dans le cas de secteurs dentés de grand rayon et d'angle très petit), puisqu'elles ont été introduites « pour que le disque entier reste sans fissure ». On peut donc ne pas les maintenir. Mais si on ne les maintient pas, *il n'y a plus continuité* dans un « passage à la limite » : on se trouve devant un problème différent : deux engrenages rectilignes D_1 et D_2, mûs par un pignon E. Les vitesses de D_1 et de D_2 sont égales et de signe contraire pour un observateur en E. Si celui-ci est, à son tour, en mouvement par rapport à un système S, les vitesses par rapport à S s'obtiennent par les formules générales qui, elles, ne comportent aucun système ni aucun observateur privilégié.

Cet exemple illustre l'importance que revêtent, dans les problèmes de solides tournants, les notions de contraintes et d'extensions des longueurs propres, dues à la cohésion de la matière.

7. Cas d'un trajet quelconque sur le disque.

(7) Que deviennent les dimensions propres des éléments du pignon E ? Le pignon est une petite roue dentée qui, elle aussi, doit rester sans fissures pendant le mouvement. Or, ses éléments inférieurs ont, par rapport au système de Galilée, la vitesse v_1; ses éléments supérieurs, la vitesse v_2. L'intégrité de cette petite roue dentée est évidemment sauvegardée si tout se passe *normalement pour les observateurs du système de Galilée*, c'est-à-dire si les éléments inférieurs sont, en longueur propre, étendus dans la proportion $1 : \sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}$ et les éléments supérieurs, dans la proportion $1 : \sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}$. Mais cette condition *n'est pas indispensable* et, en fait, elle ne peut se réaliser en raison de la rapidité avec laquelle ces éléments s'échangent entre eux. Tous les éléments du pignon prendront donc une extension moyenne.

Il en résultera que le pignon engrènera *mal* avec les dents de D_1 et de D_2 qui ont subi, de leur côté, les extensions respectives précitées. On se trouvera donc dans le cas d'engrenages défectueux (distances entre les dents du pignon trop courtes ou trop longues pour les distances entre les dents des engrenages qu'il devrait mouvoir) et il pourra en résulter, si les défauts sont trop grands, un blocage complet du mécanisme. Mais, tant qu'il marchera, le principe de son fonctionnement énoncé plus haut doit, en raison de l'existence des dents, s'appliquer strictement : « Lorsque D_1 avance d'une dent sur E, D_2 recule d'une dent ».

(8) La solution de cette difficulté, est extraite de André Metz, *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **232**, 1340.

— Nous avons vu que les calculs du paragraphe 5 ne s'appliquent rigoureusement que si les mobiles considérés (ou les propagations) circulent sur le pourtour du disque.

Dans le cas de trajets différents (c'est le cas pour la plupart des expériences réalisées jusqu'ici), ces calculs ne peuvent donner que des ordres de grandeur.

Un calcul plus précis peut se faire, dans ce cas, par la deuxième méthode indiquée plus haut (§ 4), c'est-à-dire par l'intermédiaire du *temps du disque le long du trajet parcouru*, temps défini de proche en proche sur ce trajet.

Soit $M'M'_1$ un élément de ce trajet sur le disque. La vitesse du point M' du disque par rapport au système de Galilée est $v = \omega r$, r désignant la longueur CM' et ω la vitesse angulaire.

Soit dt le temps élémentaire de ce système de

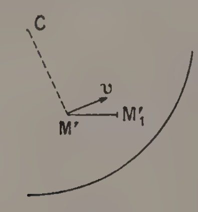


Fig. 4.

Galilée correspondant à ce trajet, et dt' le temps d'un autre système ayant la vitesse v par rapport au premier. La quatrième formule de Lorentz donne

$$dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

dx' étant la coordonnée mesurée parallèlement à la vitesse v, c'est-à-dire perpendiculairement à CM' : c'est donc la projection de $M'M'_1$ sur la direction de la vitesse v.

$$dt' = -\frac{v}{c^2}dx' + dt\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$
$$= -\frac{v}{c^2}dx' + dt - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}dt + \ldots$$

d'où le décalage temporel élémentaire

$$dt' - dt = -\frac{v\,dx'}{c^2} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}dt + \ldots, \qquad (1)$$

les termes non écrits étant en $\frac{v^4}{c^4}$, ou d'un ordre supérieur.

Le premier terme s'écrit $-\frac{\omega r\,dx'}{c^2}$.

Comme $r\,dx'$ est deux fois l'aire $d\mathcal{A}$ balayée par CM', ce premier terme est égal à $-\frac{2\omega}{c^2}d\mathcal{A}$.

Le second terme n'est pas forcément négligeable par rapport au premier [9], car si nous appelons v' la vitesse du mobile par rapport au disque

$$M'M'_1 = v'\,dt' \quad \text{et} \quad dx' = v'\,dt' \sin \widehat{CM'M'_1}.$$

Ce second terme est donc exactement de l'ordre du premier si v' est du même ordre que v. Toutefois, il est négligeable si le mobile est remplacé par une propagation lumineuse.

Sur l'ensemble d'un trajet parcouru sur le disque, le décalage temporel total est

$$t' - t = -\frac{2\omega\mathcal{A}}{c^2} - \frac{1}{2c^2}\oint v^2\,dt, \qquad (2)$$

Il y a lieu toutefois de remarquer que l'on ne compare pas — du moins dans les expériences réalisées jusqu'ici — le temps du disque avec le temps du système de Galilée, mais le temps t'_1 du disque le long du trajet décrit dans un certain sens, avec le temps t'_2 du disque le long du même trajet, décrit en sens inverse.

Si ces trajets sont décrits de façon symétrique, les seconds termes se détruisent, au moins en première approximation et l'on peut écrire (avec cette approximation)

$$t'_2 - t'_1 = 4\omega\frac{\mathcal{A}}{c^2}, \qquad (3)$$

c'est-à-dire qu'au même temps t du système de Galilée correspondent des temps t' différents totalisés le long des trajets parcourus. En conséquence, si les vitesses sont les mêmes, les distances parcourues le long de ces trajets seront différentes et l'un des mobiles (ou des propagations) considérés sera en avant de l'autre.

On peut aussi avoir, dans certains cas, avantage à comparer les temps t_1 et t_2 du système de Galilée correspondant à des temps t' égaux; par exemple, si l'on veut connaître le décalage, dans le temps, de l'arrivée de deux mobiles (ou propagations) au bout de deux trajets égaux parcourus à la même vitesse. Les seconds termes disparaissent encore et l'on a

$$t_1 - t_2 = 4\omega\frac{\mathcal{A}}{c^2}. \qquad (4)$$

Nous pouvons appliquer ces résultats au cas des mobiles circulant en sens inverse, avec des vitesses égales, sur la circonférence du disque. L'aire $\mathcal{A}$ est égale à πr^2. En appelant u la vitesse circonférentielle,

$$\omega = \frac{u}{r}, \qquad v = u = \text{const}.$$

Dans la formule (2),

$$\oint v^2\,dt = u^2\oint dt \quad \text{et} \quad \oint dt = \frac{2\pi r}{v'}$$

(approximativement)

(en réalité, c'est la valeur de $\oint dt'$, mais dt et dt' ne diffèrent que par des quantités d'ordre supérieur).

[9] Certains auteurs, dans des calculs analogues (*cf.* LANGEVIN, *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **200**, 50), n'en ont tenu aucun compte et ont écrit seulement le premier terme, disant qu'ils opéraient « au premier ordre en ω ». Cette manière de procéder n'est pas légitime, comme on le voit.

Le premier terme de cette formule (2) est alors $-\frac{2\pi ru}{c^2}$ et le second $-\frac{\pi ru^2}{c^2 v'}$; il est dn même ordre que le premier si v' est du même ordre que u. Il est négligeable si v' est égal à c ou approche de cette valeur.

La formule (3) donne

$$t'_2 - t'_1 = \frac{4\pi ru}{c^2},$$

c'est-à-dire que l'un des mobiles aura parcouru, pendant le même temps t du système de Galilée, $\frac{4\pi ru}{c^2}$ de plus que l'autre. Au moment où le mobile n° 1 arrive au point O', le second l'a dépassé de

$$O'O'_2 = v' \frac{4\pi ru}{c^2},$$

Les deux mobiles ont dû se croiser en O'_1, à mi-distance. Donc

$$O'O'_1 = \frac{2\pi ruv'}{c^2}.$$

On retrouve ainsi le résultat du calcul rigoureux du paragraphe 5.

8. L'expérience de Sagnac. — L'expérience de Sagnac, qui date de 1913 [11], est la plus célèbre des expériences mettant en évidence la rotation par un effet optique. Rappelons-en le dispositif dans ses lignes essentielles.

Un faisceau lumineux issu d'une source S est envoyé sur une lame semi-réfléchissante L, de sorte qu'une partie du faisceau, réfléchie successivement par des miroirs, accomplit un trajet polygonal sur un disque, tandis que l'autre partie suit le même trajet en sens inverse. Les deux faisceaux se referment sur la lame L et coïncident géométriquement à partir de là, jusqu'à un appareil photographique P.

Lorsque le disque est immobile, les interférences entre les faisceaux qui arrivent en P forment des franges qui sont photographiées par l'appareil.

Si le disque est mis en mouvement, les franges se déplacent et la photographie permet de mesurer ce déplacement de façon précise.

A noter que, dans l'expérience originale, la source et l'appareil photographique étaient également liés au disque.

L'interprétation de cette expérience a d'abord été donnée par son auteur comme une « preuve de la réalité de l'éther lumineux » et une « démonstration de l'effet du vent relatif d'éther ».

Ce qu'elle a démontré réellement, c'est que « la lumière se propage dans l'espace avec une vitesse indépendante du mouvement d'ensemble de la source et du système optique ». En effet, le résultat observé est exactement celui que l'on peut calculer en se plaçant dans le système de référence du laboratoire (« première méthode ») et en tenant compte de l'*allongement* du trajet d'un des faisceaux lumineux par la rotation, ainsi que du *raccourcissement* de l'autre. Or, ce mode de calcul se justifie aussi bien dans la théorie de l'éther que dans la Relativité, pourvu que l'on admette qu'il n'y a *aucun entraînement* des ondes lumineuses par le mouvement de la source ou des appareils optiques quels qu'ils soient (tout se passe dans le même système de référence et il n'y a aucune application de formules de transformation).

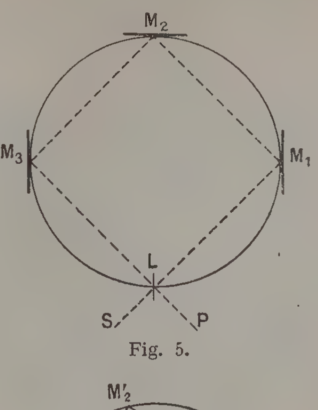


Fig. 5.

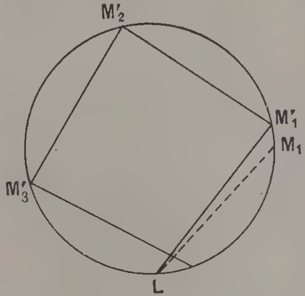


Fig. 6.

Max von Laue en a donné le détail [12], [13] en admettant que le circuit optique se compose d'un carré parfait inscrit dans le disque, $LM_1M_2M_3L$, L désignant la lame semi-transparente et M_1, M_2 et M_3 les miroirs, et en calculant les longueurs des trajets LM'_1, $M'_1M'_2$, $M'_2M'_3$, M'_3M' (tous égaux) lorsque l'appareil est en mouvement (*fig.* 5 et 6).

En fait, le circuit utilisé n'est pas forcément un carré (dans ses expériences, Sagnac utilisait un pentagone irrégulier). La démonstration ci-dessous s'applique à un polygone quelconque.

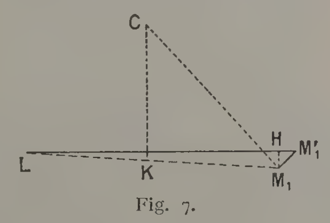


Fig. 7.

Soit LM_1 un élément de trajet rectiligne sur le disque, de longueur l. Pendant qu'il est parcouru par la lumière, c'est-à-dire pendant le temps $\frac{l}{c}$, le point M_1 vient en M'_1, sur la circonférence de centre C et passant par M_1, à une distance $M_1M'_1 = r\omega\frac{l}{c}$, en désignant par r

la distance CM_1 et ω la vitesse angulaire. Le trajet de la lumière est allongé de $LM'_1 - LM_1$, soit

$$HM'_1 = M_1 M'_1 \cos\mu,$$

μ étant l'angle $M_1 M'_1 L$. Donc l'allongement s'écrit

$$r\omega \frac{l}{c} \cos\mu.$$

Si nous abaissons de C la perpendiculaire CK sur LM_1, nous remarquons que l'angle $M_1CK = \mu$ (10). Donc

$$r\cos\mu = CK \quad \text{et} \quad rl\cos\mu = 2 \text{ aire } CLM_1.$$

L'allongement est alors $\dfrac{2\omega \text{ aire } CLM_1}{c}$.

Sur l'ensemble du circuit, il est donc $\dfrac{2\omega\mathcal{A}}{c}$, $\mathcal{A}$ désignant l'aire du polygone.

Le trajet parcouru en sens inverse est *raccourci* d'autant, donc la différence des deux trajets est $\dfrac{4\omega\mathcal{A}}{c}$, ce qui correspond à un décalage temporel de $\dfrac{4\omega\mathcal{A}}{c^2}$ entre les ondes des deux faisceaux à leur arrivée sur la glace qui termine leurs parcours sur le disque.

On peut aussi, pour l'interprétation de cette expérience, procéder par la « deuxième méthode » et appliquer les calculs du paragraphe 7 (temps et coordonnées mesurées sur le disque).

La formule (4) donne, pour le retard d'un faisceau sur l'autre après un tour complet, la valeur $\dfrac{4\omega\mathcal{A}}{c^2}$. Il s'agit de la comparaison des *temps* totalisés sur les trajets des faisceaux. Comme les ondes, d'après la théorie de la Relativité, ont toujours la même vitesse c par rapport aux éléments du disque successivement parcourus et que les trajets sur le disque sont égaux, ce retard est aussi celui des ondes de l'un des faisceaux sur celles de l'autre. On retrouve donc la formule du décalage temporel, mais, cette fois, par un raisonnement purement relativiste (et indépendant de la forme du circuit).

Bien entendu, ce n'est pas une différence temporelle que l'on observe, mais le retard d'un des faisceaux sur l'autre, révélé par une déviation des franges d'interférence. On a avantage à exprimer ce retard en nombre de longueurs d'onde. Ce nombre est

$$\frac{4\omega\mathcal{A}}{c^2}\,\frac{c}{\lambda} = \frac{4\omega\mathcal{A}}{c\lambda}.$$

En fait, il s'agit d'une fraction plus petite que 1.

L'expérience montre, qu'effectivement, on observe un déplacement des franges, de la valeur d'une fraction de frange correspondant à cette expression.

Enfin, une démonstration assez élégante a été donnée par P. Langevin [3] par le procédé appelé plus haut « troisième méthode » et consistant à utiliser le temps du système galiléen du laboratoire et les coordonnées d'espace d'un système « disque » calculées exactement comme dans la Mécanique classique. Si x, y, z, t sont les coordonnées dans le premier système et x', y', z', t' dans le second, on a

$$x = x\cos\omega t - y'\sin\omega t, \qquad z = z',$$
$$y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t,$$

le temps t restant inchangé : $t = t'$.

La propagation de la lumière est caractérisée par

$$c^2\,dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

c'est-à-dire (en négligeant les termes du second ordre en ω) :

$$c^2\,dt^2 = 2\omega(x'\,dy' - y'\,dx') + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2.$$

Remarquons que

$$x'\,dy' - y'\,dx' = 2\,d\mathcal{A},$$

$d\mathcal{A}$ étant l'aire du triangle ayant pour sommet l'origine des coordonnées et pour base l'élément de rayon lumineux, mesuré par les observateurs liés à la plate-forme.

En outre,

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dl'^2,$$

dl' étant la mesure de cet élément.

L'équation de la propagation de la lumière s'écrit donc

$$c^2\,dt^2 - 4\omega\,d\mathcal{A}\,dt = dl'^2$$

ou, au même ordre d'approximation,

$$c\,dt - 2\omega\,d\mathcal{A} = dl' \qquad \text{ou} \qquad dt = \frac{dl'}{c} + 2\frac{\omega}{c^2}\,d\mathcal{A}.$$

D'où, pour un des rayons, par intégration

$$t = \frac{l'}{c} + \frac{2\omega\mathcal{A}}{c^2}.$$

Pour le rayon qui parcourt le même chemin en sens inverse, on doit changer le signe de ω. La différence des temps d'arrivée au bout d'un même chemin parcouru l' se traduit donc par une différence temporelle $\dfrac{4\omega\mathcal{A}}{c^2}$.

Cette démonstration, qui a été donnée par son auteur comme une application de la « Relativité généralisée » est, en réalité, entièrement conforme à la Mécanique classique. Cette manière de faire est justifiée par le fait que les deux cinématiques coïncident au premier ordre (11).

(10) C'est tout à fait rigoureux si L est sur la circonférence de centre C et passant par M_1 (car l'angle inscrit LM'_1M_1 est égal à la moitié de l'angle au centre LCM_1). C'est très approché, de toute façon, car les droites LM_1 et LM'_1 sont presque confondues.

(11) Voici ce que dit à ce sujet P. Langevin : « Les caractères de symétrie du phénomène de rotation et, en particulier, le fait que la rotation change de sens avec l'orientation de l'observateur suivant l'axe, exigent que la marche d'horloges portées par la plate-forme, ainsi que les dimensions de celle-ci et des règles qui lui sont liées, ne soient modifiées qu'au 2e ordre en $\dfrac{\omega R}{c}$ par rapport à la marche d'horloges ou aux dimensions de règles de même construction liées à des observateurs sans rotation, ces modifications ne devant pas changer avec le signe de ω, ...

« Il en résulte que, si l'on représente par x, y, z, t et x', y', z', t' les coordonnées d'espace-temps d'un même événement par rapport à des axes rectangulaires liés à la plate-forme et à

9. L'expérience de Harress et les expériences de Dufour et Prunier. — L'expérience de Harress [14], réalisée en 1912, donc un an avant celle de Sagnac, comporte à peu près le même dispositif, mais les trajets lumineux sur le disque se font dans des prismes réfringents. La vitesse de la lumière dans ces prismes est donc, non pas c, mais $\frac{c}{n}$, n étant l'indice de réfraction de la matière transparente. Quel que soit cet indice, le résultat est le même et le retard d'un des faisceaux sur l'autre est encore $\frac{4\omega\mathcal{A}}{c^2}$ comme dans l'expérience de Sagnac.

Ce résultat se déduit facilement de la théorie de la Relativité par la « deuxième méthode » : en effet, d'après cette théorie, la vitesse de la lumière dans les prismes est $\frac{c}{n}$ *par rapport à ceux-ci*; les vitesses et les trajets des faisceaux étant égaux, la formule (4) s'applique, comme dans l'expérience de Sagnac, à l'arrivée des ondes au point L où les deux trajets se réunissent.

Comme c'est dans l'air qu'ont lieu les interférences (*après* la sortie des faisceaux des milieux réfringents), c'est encore par $\frac{c}{\lambda}$ qu'il faut multiplier le décalage temporel pour avoir le nombre de franges auquel il correspond.

Ce nombre, exprimé par la fraction $\frac{4\omega\mathcal{A}}{c\lambda}$ est bien celui qui a été observé.

A. Dufour et F. Prunier [15] ont, de 1936 à 1941, exécuté plusieurs séries d'expériences au sujet de phénomènes lumineux sur un disque tournant du genre de celui de Sagnac, en variant les conditions de ces expériences et, notamment, en combinant des appareils fixes (source, prismes, miroirs, appareil photographique) avec d'autres, entraînés par le disque en mouvement. Le dispositif d'ensemble n'est alors illumininé qu'une fois par tour, par un éclair assez bref. Malgré cette brièveté, les expérimentateurs ont pu obtenir des franges très visibles, dont les déplacements sont fonction des mouvements de rotation du disque.

Ils ont d'abord repris l'expérience de Sagnac en remplaçant la source lumineuse entraînée par une source fixe, puis l'appareil photographique (également entraîné) par un appareil fixe. Les résultats n'ont montré *aucune influence de l'état de repos ou de mouvement de la source, ni de cet appareil.*

Ils ont également repris cette expérience en intercalant sur le trajet de la lumière des tubes remplis d'eau, fermés à chaque extrémité par des glaces normales aux faisceaux lumineux et *ne participant pas à la rotation.*

La théorie de cette dernière expérience se fait très facilement par la « première méthode » ([12]) [16]. En effet, si les parcours lumineux extérieurs aux tubes sont négligeables vis-à-vis de ceux qui sont effectués dans l'eau, le calcul de l'expérience de Sagnac (§ 8) s'applique, avec cette modification, que le temps mis par la lumière pour parcourir la longueur l n'est plus $\frac{l}{c}$, mais $\frac{ln}{c}$, n étant l'indice de l'eau.

La différence de longueur des deux trajets est donc $\frac{4\omega\mathcal{A}n}{c}$.

Quel sera le décalage temporel entre les ondes des deux faisceaux, à leur arrivée sur la glace qui termine les parcours sur le disque ?

Si les surfaces terminales des tubes sont *parallèles* aux directions telles que $M_1M'_1$, c'est-à-dire normales aux rayons CM_1, etc., les augmentations et diminutions de longueur des trajets ont lieu *proportionnellement* dans l'eau et dans l'air; donc, en vertu de la prépondérance des parcours dans l'eau, le décalage temporel sera

$$\frac{4\omega\mathcal{A}n}{c} : \frac{c}{n} = \frac{4\omega\mathcal{A}n^2}{c^2}.$$

Mais, dans l'expérience telle qu'elle a été effectivement faite, les tubes d'eau sont fermés par des vitres planes perpendiculaires aux directions des rayons lumineux. Il en résulte que les trajets dans l'eau sont forcément toujours les mêmes pour les faisceaux lumineux (dans un sens ou dans l'autre) que le disque tourne ou ne tourne pas (*fig.* 8). La différence des trajets porte alors uniquement sur des parcours dans l'air, bien que ceux-ci soient relativement petits (la différence en question est beaucoup plus petite). Le décalage temporel doit être alors

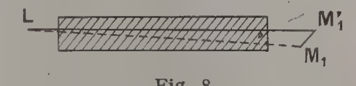


Fig. 8.

$$\frac{4\omega\mathcal{A}n}{c} : c = \frac{4\omega\mathcal{A}n}{c^2}.$$

C'est effectivement un déplacement de franges de cet ordre qui a été observé (et « d'autant plus voisin de cette valeur que le parcours lumineux extérieur aux tubes était plus petit »).

Enfin, ils ont réalisé un appareil du type de celui de Sagnac, où le circuit lumineux est composé de deux parties, dont une est fixe par rapport au laboratoire et l'autre solidaire du disque en rotation.

Le schéma du montage est représenté par les figures 9 et 10. La source de lumière S, la glace semi-transparente L et les miroirs K, J, D, E, F sont solidaires de la plate-forme, comme l'appareil photographique P. Les miroirs G, H, I sont fixes par rapport au laboratoire. Les deux faisceaux qui interfèrent suivent, l'un le trajet SLDEFGHIJKLP et l'autre SLKJIHGFEDLP. Le miroir H se trouve au-dessus du centre C du disque, le miroir G au-dessus de F et le miroir I au-dessus de J. Le raisonnement et le calcul du paragraphe 7 s'appliquent et le retard est encore $\frac{4\omega\mathcal{A}}{c^2}$, $\mathcal{A}$ étant l'aire CJKLDFC (dont il faut

des axes sans rotation respectivement, les relations habituelles de la Cinématique ancienne subsistent au 1er ordre entre ces deux systèmes de coordonnées. »

([12]) Elle est beaucoup plus longue et délicate par la « seconde méthode », en raison de la nécessité de composer la vitesse de la lumière dans l'eau avec la vitesse (variable suivant le point considéré) de cette eau relativement au disque. *Voir* plus loin (Appendice).

retrancher l'aire du petit triangle DE, parcouru en sens inverse). On observe effectivement un déplacement des franges d'interférence correspondant à la fraction $\frac{4\omega\mathcal{A}}{c\lambda}$.

Les auteurs de cette expérience avaient pensé mettre en faute l'interprétation relativiste du résultat de Sagnac, en se basant sur un texte présentant cette interprétation et où le sommet des aires élémentaires (analogues aux aires $CM'M'_1$ introduites dans le raisonnement du paragraphe 7), était donné comme

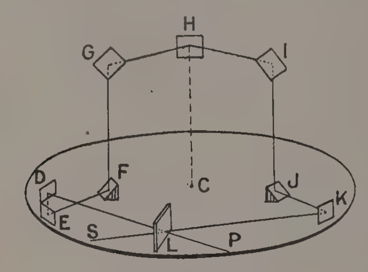


Fig. 9. — Appareil de Dufour et Prunier (perspective).

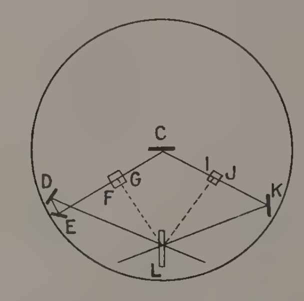


Fig. 10. — Appareil de Dufour et Prunier (plan).

« pouvant être choisi arbitrairement » [17]. En choisissant alors le point L, l'aire décrite par la « partie mobile » du circuit de la lumière se trouvait réduite à la somme des surfaces des triangles LJK et EFL, donc beaucoup plus petite que l'aire $\mathcal{A}$ précédente.

En réalité, les raisonnements tels que celui du paragraphe 7 et qui conduisent à la considération des « aires » décrites par les rayons lumineux (ou les mobiles considérés) supposent que le sommet C des aires élémentaires est le centre de la plate-forme mobile ([13]) et c'est seulement si l'aire est fermée que le résultat peut être généralisé (après coup) pour un sommet arbitraire.

Appliquant le raisonnement en question à l'ensemble des trajets parcourus par la lumière sur le disque (LKJ et FDEL), on voit que le décalage temporel sur cet ensemble est bien $\frac{2\omega\mathcal{A}}{c^2}$ pour l'un des faisceaux par rapport au temps du système de Galilée [§7, form. (2), en négligeant le second terme puisqu'il s'agit de propagation lumineuse]. Les deux rayons parcourent ces trajets en sens inverse l'un de l'autre et, d'autre part, leurs trajets fixes sont les mêmes. Le décalage temporel entre les deux faisceaux est donc $\frac{4\omega\mathcal{A}}{c^2}$.

Les mêmes expérimentateurs ont refait la même expérience en plaçant des tubes d'eau sur le trajet fixe. Le résultat n'est pas changé, car le décalage temporel dû aux trajets mobiles est le même que dans l'expérience faite entièrement dans l'air, et, d'autre part, les trajets fixes sont plus longs, mais ils sont toujours rigoureusement égaux pour les deux faisceaux.

Cette dernière expérience a été présentée d'abord comme un échec de la théorie de la Relativité, parce qu'elle montre que l'effet observé ne dépend que de la partie du circuit « entraînée » dans le mouvement du disque en la distinguant nettement par là de la partie « fixe ». En réalité, comme on vient de le voir, cet effet est exactement prévu par la théorie de la Relativité, qui n'admet de réciprocité complète qu'entre les systèmes de référence de Galilée, animés les uns par rapport aux autres de mouvements de translation uniforme.

10. **Conclusions.** — Nous avons examiné les principaux problèmes qui ont été posés en ce qui concerne les disques en rotation et particulièrement ceux qui correspondent à des expériences effectivement faites.

Celles-ci n'ont concerné, du moins jusqu'ici, que des phénomènes lumineux se passant, soit dans l'air, soit dans des corps réfringents, et comme les effets observés étaient du « premier ordre » au point de vue de la vitesse du disque, leur interprétation était également possible dans la théorie de la Relativité et dans la théorie classique de l'éther. Cette assertion, établie d'abord de façon générale, a été confirmée par l'examen détaillé des expériences, malgré la complication de certains dispositifs et les difficultés des raisonnements qui en résultent.

A ce sujet, il faut remarquer que la théorie de la Relativité — comme d'ailleurs la théorie de l'éther — n'est pas attachée à un procédé particulier de raisonnement ou de calcul. Dans les discussions qui ont eu lieu depuis le début du siècle, il semble que les physiciens « relativistes » aient cherché à *relever des défis* consistant à donner des interprétations « einsteiniennes » de certaines expériences — faites ou supposées — du point de vue de certains « observateurs », dont l'emplacement et le mouvement étaient souvent donnés *a priori* de façon précise. Il en est parfois résulté des rédactions hâtives où se sont glissées des assertions partiellement inexactes, qui ont amené des malentendus prolongés.

Comme toute théorie de physique mathématique, la Relativité permet de résoudre les problèmes de son domaine, chacun par un procédé adéquat. En particulier, un système de référence bien choisi permet

([13]) Par un mode de raisonnement et de calcul tout différent, M. O. Costa de Beauregard a montré (*C. R. Acad. Sc.*, 1940, **211**, 634 et *La théorie de la Relativité restreinte*, Paris, 1949, p. 50) qu'on pouvait choisir n'importe quel point du disque (et le point L, en particulier) comme « centre instantané de rotation » pour un calcul au 1er ordre. Il faut alors adopter comme système de référence le système galiléen qui a, au moment considéré, la même vitesse que ce point du disque et tenir compte du décalage de la simultanéité entre ce système et celui du laboratoire, pour les trajets GHI (dans un sens) et IHG (dans l'autre). On retombe alors sur le résultat correct.

souvent de présenter les raisonnements et les calculs de façon particulièrement simple et claire (et parfois de façon rigoureuse), alors qu'un autre choix, au départ, conduirait à des difficultés peut-être inextricables. Si l'on a besoin ensuite de calculs dans un autre système, les formules de transformation de Lorentz permettent de passer des éléments déjà obtenus dans le premier, aux éléments dans ce nouveau système, sans qu'il soit besoin de recourir de nouveau aux principes généraux et de recommencer les raisonnements.

Dans l'ensemble, on peut dire que la théorie de la Relativité permet, dans ce domaine comme ailleurs, la plus grande simplicité dans la résolution des problèmes et l'interprétation des expériences, sans intervention d'hypothèses auxiliaires.

APPENDICE.

L'expérience de Harress par la première méthode et l'expérience de Dufour et Prunier par la seconde méthode. — Il est intéressant de comparer la théorie de l'expérience de Sagnac avec prismes réfringents interposés (réalisée par Dufour et Prunier) avec celle de l'expérience de Harress. Dans la première, les prismes étaient fixes par rapport au laboratoire, dans la seconde, ils étaient entraînés avec le disque dans son mouvement de rotation.

La théorie de l'expérience avec prismes fixes a été faite plus haut (§ 9) par la « première méthode » : les calculs y sont très simplifiés, en raison de la constance de la vitesse de la lumière sur les trajets des deux faisceaux.

Pour une raison analogue, la théorie de l'expérience de Harress (§ 9) a été très simplifiée par la « seconde méthode ».

En vue d'une comparaison plus poussée entre ces deux expériences, on peut se proposer de faire la théorie de l'expérience de Harress par la première méthode et celle de l'expérience de Dufour et Prunier avec prismes fixes interposés sur le trajet mobile, par la seconde méthode.

Nous supposons que, dans chacune de ces expériences, la presque totalité des parcours a lieu dans les milieux réfringents.

L'expérience de Harress par la première méthode. — Pour obtenir le décalage temporel entre les ondes ayant parcouru le circuit dans un sens et dans l'autre, il faut calculer séparément les temps mis par les ondes pour accomplir ces parcours et les retrancher l'un de l'autre. Les vitesses étant variables en chaque point du trajet, il est indispensable de considérer d'abord un élément infiniment petit du trajet et de faire une sommation.

Soit $MM_1 = dl$ cet élément mesuré sur le disque. Pendant que la lumière le parcourt, le point M_1 vient en M'_1 tel que

$$M_1M'_1 = dl\, v\, \frac{n'_1}{c},$$

v étant la vitesse du point du disque considéré par rapport au laboratoire et $\frac{c}{n'_1}$ la vitesse de la lumière dans le corps réfringent, par rapport au laboratoire.

Nous supposons d'abord qu'il s'agit du faisceau qui parcourt le circuit dans le sens de la rotation du disque, ou « premier faisceau ». Le trajet élémentaire est alors *allongé*, du fait de cette rotation, de la longueur

$$HM'_1 = M_1M'_1 \cos\mu = dl\, v\, \frac{n'_1}{c} \cos\mu,$$

μ étant l'angle que fait MM'_1 avec la direction de la vitesse de M_1 (normale au rayon CM_1).

L'élément de longueur parcouru par la lumière sur le disque et qui a pour longueur mesurée sur le disque dl, a donc pour longueur par rapport au système du laboratoire

$$dl + v\,\frac{n'_1}{c}\cos\mu\, dl$$

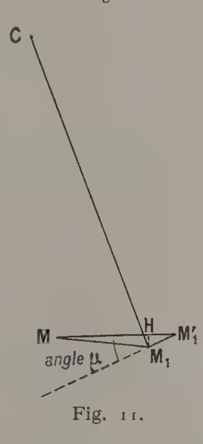


Fig. 11.

(en négligeant la contraction lorentzienne, qui est du second ordre en v).

Le trajet est parcouru, en chaque point, avec la vitesse $\frac{c}{n'_1}$. Le temps mis à le parcourir est donc

$$\frac{n'_1}{c}\, dl + v \cos\mu\, \frac{n'^2_1}{c^2}\, dl.$$

Le temps total sur le circuit est

$$\oint \frac{n'_1}{c}\, dl + \oint v \cos\mu\, \frac{n'^2_1}{c^2}\, dl.$$

Pour le second faisceau, le trajet élémentaire du même circuit est raccourci par la rotation et si $\frac{c}{n'_2}$ est la vitesse de la lumière sur ce faisceau, le temps total est

$$\oint \frac{n'_2}{c}\, dl - \oint v \cos\mu\, \frac{n'^2_2}{c^2}\, dl,$$

les sommations étant faites sur les *mêmes* éléments dl.

Le retard des ondes d'un des faisceaux sur l'autre est donc :

$$\oint \frac{n'_1 - n'_2}{c}\, dl + \oint \frac{n'^2_1 + n'^2_2}{c^2}\, v \cos\mu\, dl.$$

On peut remarquer que la première intégrale représente la différence des temps mis par les ondes pour parcourir le circuit tel qu'il est lorsque le disque ne tourne pas, et la seconde le décalage temporel résul-

tant de l'*allongement* d'un faisceau par la rotation, augmenté de celui qui résulte du raccourcissement de l'autre [14].

Il y a là deux facteurs qui jouent en sens opposé : en effet, si le premier facteur existait seul, les ondes du premier faisceau (dans le sens de la rotation du disque) prendraient de l'*avance* sur celles du second faisceau. Mais, en vertu du second facteur (allongement et raccourcissement), elles sont retardées.

La formule de Fresnel donne, au premier ordre, la vitesse de la lumière $\frac{c}{n'_1}$ en fonction de la vitesse dans le corps réfringent au repos $\frac{c}{n}$ et de la vitesse de ce corps dans la direction suivie par la lumière, qui est ici $v \cos\mu$

$$\frac{c}{n'_1} = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\mu$$

ou

$$\frac{n'_1}{c} = \frac{n}{c + vn\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\mu}.$$

De même,

$$\frac{c}{n'_2} = \frac{c}{n} - v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\mu$$

ou

$$\frac{n'_2}{c} = \frac{n}{c - vn\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\mu}.$$

Alors,

$$\frac{n'_1 - n'_2}{c} = \frac{-2vn^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\mu}{c^2 - v^2n^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos^2\mu}$$

ou, en négligeant les termes en v^2 devant c^2,

$$\frac{n'_1 - n'_2}{c} = \frac{-2v(n^2 - 1)\cos\mu}{c^2 - \ldots}.$$

De la même façon,

$$\frac{n'^2_1}{c^2} + \frac{n'^2_2}{c^2} = \frac{n^2}{c^2 + 2vcn\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\mu + \ldots} + \frac{n^2}{c^2 - 2vcn\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos^2\mu + \ldots} = \frac{2n^2c^2}{c^4\ldots} = \frac{2n^2}{c^2 - \ldots}.$$

[14] Ces deux décalages étant de même sens doivent, en effet, s'additionner.

Notons que l'allongement étant $\int v \frac{n'_1}{c} \cos\mu \, dl$, le retard qui en résulte s'obtient en divisant par $\frac{c}{n'_1}$ (et non par c), car cet allongement a lieu sur chacun des éléments du trajet, qui sont en presque totalité parcourus dans le corps réfringent, entraîné avec le disque. (Le cas est donc très différent de celui de l'expérience avec prismes fixes.)

Si l'on remplace alors les termes en n'_1 et n'_2 par leurs valeurs ainsi calculées, le retard d'un des faisceaux sur l'autre s'écrit

$$\oint \frac{-2v(n^2 - 1)\cos\mu}{c^2} dl + \oint \frac{2n^2}{c^2} v \cos\mu \, dl.$$

Les termes en n^2 s'annulent, ce qui montre que les « facteurs » précédemment discernés (facteur d'avance et facteur de retard) se détruisent pour la plus grande part.

Il reste

$$\oint \frac{2v\cos\mu \, dl}{c^2}.$$

Or,

$$v \, dl \cos\mu = \omega r \, dl \cos\mu$$

en appelant r la distance CM_1.

Si l'on désigne par $d\mathcal{A}$ l'aire élémentaire CMM_1,

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r \, dl \cos\mu.$$

Le retard d'un des faisceaux sur l'autre pour l'ensemble du circuit est donc

$$\oint \frac{4\omega \, d\mathcal{A}}{c^2} = \frac{4\omega\mathcal{A}}{c^2}.$$

L'expérience de Dufour et Prunier (*avec prismes fixes sur le trajet mobile*) *par la seconde méthode* (éléments calculés par rapport au disque) [18], [19]. — Le retard des ondes d'un des faisceaux sur l'autre résulte de l'addition :

1° de la différence entre le temps mis par les ondes du premier faisceau pour parcourir le circuit dans le sens de la rotation du disque et le temps mis par les ondes du second faisceau pour parcourir le circuit en sens inverse;

2° du décalage des temps locaux le long des trajets parcourus, qui est $\frac{4\omega\mathcal{A}}{c^2}$.

Si nous admettons que la presque totalité des parcours est exécutée dans le milieu réfringent et que *la petite fraction qui a lieu dans l'air n'est pas modifiée du fait de la rotation du disque*, le temps mis par les ondes du premier faisceau est $\oint \frac{n'_1}{c} dl$, $\frac{c}{n'_1}$ étant la vitesse de la lumière dans le corps réfringent *par rapport au disque*, au point considéré.

Le temps mis par les ondes du second faisceau est, de même $\oint \frac{n'_2}{c} dl$.

n'_1 et n'_2 peuvent être calculés, au premier ordre, par les formules de Fresnel, en partant du fait que la vitesse de la lumière dans le corps réfringent serait $\frac{c}{n}$ par rapport au disque, si ce corps était entraîné avec le disque.

Si l'on appelle v la vitesse du point M considéré du disque, par rapport au laboratoire, la vitesse de la matière réfringente par rapport au disque est égale à v et de sens contraire. Si l'on désigne par μ l'angle que fait, avec la direction de cette vitesse, le parcours dl,

la composante de cette vitesse sur le trajet de la lumière au point M est $-v\cos\mu$.

Donc

$$\frac{c}{n'_1} = \frac{c}{n} - v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\mu.$$

Dans l'autre sens,

$$\frac{c}{n'_2} = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\mu.$$

On peut écrire

$$\frac{n'_1}{c} = \frac{n}{c - vn\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\mu}$$

et

$$\frac{n'_2}{c} = \frac{n}{c + vn\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\mu}.$$

D'où

$$\frac{n'_1 - n'_2}{c} = \frac{2vn^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\mu}{c^2 - \dots}$$

en négligeant v^2 devant c^2.

La différence $\oint \frac{n'_1 - n'_2}{c}\,dl$ devient alors

$$\oint \frac{2v(n^2 - 1)\cos\mu}{c^2}\,dl$$

ou, en remplaçant v par ωr,

$$\oint \frac{2(n^2-1)}{c^2}\,\omega r\cos\mu\,dl,$$

comme $r\cos\mu\,dl = 2\,d\mathcal{A}$, l'intégrale devient

$$\oint 4\omega\frac{n^2-1}{c^2}\,d\mathcal{A} = 4\omega\frac{n^2-1}{c^2}\,\mathcal{A}.$$

Si l'on ajoute le décalage temporel (des *temps mesurés le long des trajets*), $\frac{4\omega\mathcal{A}}{c^2}$, le retard total est $4\omega\frac{n^2}{c^2}\mathcal{A}$.

Ce résultat n'est valable, comme on l'a vu plus haut (§ 9), que si la proportion des parcours dans l'air et dans le milieu réfringent n'est pas modifiée du fait de la rotation du disque. Cette condition pourrait être réalisée si les faces terminales des prismes ou tubes renfermant ce milieu étaient parallèles aux directions telles que $M_1M'_1$, etc., c'est-à-dire perpendiculaires à CM_1, etc.

En fait, elle n'a pas été réalisée dans les expériences effectivement exécutées jusqu'ici.

Les tubes remplis d'eau placés sur chaque élément rectiligne du trajet lumineux étaient, dans ces expériences, fermés par des surfaces normales à la direction de cet élément (*fig.* 8). Il en résulte que la partie de ce parcours effectuée à l'intérieur du tube reste constante si le disque est immobile ou est mis en mouvement. L'allongement $lv\frac{n}{c}\cos M'_1$ que subit chaque élément rectiligne de longueur l du premier faisceau par la rotation du disque, a lieu uniquement dans l'air.

Or, pour les mesures faites sur le disque, cet élément garde, *au total*, sa longueur l. Il y a donc une fraction de cette longueur — dans la proportion de $\frac{vn}{c}\cos M'_1$ à 1 — où, en raison de la rotation du disque, la propagation dans le corps réfringent est remplacée par une propagation dans l'air.

Le temps mis par la lumière pour accomplir le parcours LM_1 n'est donc plus $\int\frac{n'_1}{c}\,dl$, mais

$$\int\frac{n'_1}{c}\,dl\left(1 - v\frac{n}{c}\cos M'_1\right) + \frac{l}{c}\frac{n}{c}\,v\cos M'_1,$$

la sommation étant effectuée sur le parcours LM'_1.

Pour le même parcours exécuté par la lumière en sens inverse (second faisceau), il y a, au contraire, augmentation relative du parcours dans l'eau [15] — pour les mesures prises sur le disque — et le temps mis pour accomplir le parcours M'_1L n'est plus $\int\frac{n'_2}{c}\,dl$, mais

$$\int\frac{n'_2}{c}\,dl\left(1 + v\frac{n}{c}\cos M'_1\right) - \frac{l}{c}\frac{n}{c}\,v\cos M'_1.$$

La différence est donc

$$\int\frac{n'_1 - n'_2}{c}\,dl - \int\frac{n'_1 + n'_2}{c}\,\frac{n}{c}\,v\cos M'_1\,dl + 2\,l\frac{n}{c^2}\,v\cos M'_1,$$

les sommations étant toujours effectuées sur le parcours LM'_1.

La première intégrale est, d'après le calcul fait plus haut, égale à $4\omega\frac{n^2-1}{c^2}$ aire CLM_1.

Si l'on tient compte que

$$\frac{n'_1 + n'_2}{c} = \frac{2nc}{c^2 + \dots} = \frac{2n}{c^2},$$

en faisant les mêmes approximations que précédemment, la seconde intégrale devient

$$2\frac{n^2}{c^2}\,lv\cos M'_1.$$

[15] Ainsi, bien que l'on ait considéré les parcours dans l'air comme négligeables, au total, vis-à-vis des parcours dans l'eau, on a été conduit à tenir compte des *variations* de ces parcours, dues à la rotation du disque, variations dont les conséquences se trouvent être de l'ordre de grandeur des effets observés.

Si l'on ne néglige pas les parcours lumineux dans l'air, on trouve, par les mêmes raisonnements, que le retard des ondes est

$$4\omega\mathcal{A}_e\frac{n}{c^2} + 4\omega\frac{\mathcal{A}_a}{c^2}$$

en désignant par $\mathcal{A}_e$ l'aire balayée par le rayon CM du disque et correspondant à des parcours dans l'eau, et $\mathcal{A}_a$ l'aire correspondant à des parcours dans l'air.

Or,

$$lv \cos M'_1 = 2\omega \text{ aire } CLM_1.$$

La différence des temps sur le parcours LM'_1 s'écrit donc

$$4\omega \frac{n^2-1}{c^2} \text{ aire } CLM_1 - 4\omega \frac{n^2}{c^2} \text{ aire } CLM_1 + 4\omega \frac{n}{c^2} \text{ aire } CLM_1 = 4\omega \frac{n-1}{c^2} \text{ aire } CLM_1.$$

Pour l'ensemble du circuit, la différence des temps est $4\omega \frac{n-1}{c^2} \mathcal{A}$. Et si l'on ajoute le décalage des temps eux-mêmes, qui est $\frac{4\omega\mathcal{A}}{c^2}$, on voit que le retard total des ondes du premier faisceau sur celles du second, à leur arrivée sur la glace semi-transparente après un circuit complet, est $\frac{4\omega n \mathcal{A}}{c^2}$.

Manuscrit reçu le 11 décembre 1952.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Einstein A. — *La théorie de la Relativité restreinte et généralisée*, trad. Rouvière, Paris, 1921, p. 70.

[2] Metz A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1924, **178**, 2054.

[3] Langevin P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1921, **173**, 831, et 1937, **205**, 304.

[4] Prunier F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **200**, 46; *Revue scientifique*, 1948, **86**, 729.

[5] Langevin P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **200**, 48 et 894.

[6] Metz A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **232**, 1185.

[7] Dufour A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **200**, 894.

[8] Costa de Beauregard O. — *Revue scientifique*, 1948, **86**, 424.

[9] Prunier F. — *Revue scientifique*, 1948, **86**, 729.

[10] Langevin P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **200**, 1162.

[11] Sagnac G. — *C. R. Acad. Sc.*, 1913, **157**, 708 et 1410; *J. Physique Rad.*, 1914, **4**, 177.

[12] Laue M. von. — *Die Relativitätstheorie*, 1919, p. 74 et 125.

[13] Becquerel J. — *Le principe de Relativité et la théorie de la gravitation*, Paris, 1922, p. 77.

[14] Harress F. — *Die Geschwindigkeit des Lichts in bewegten Körpern*, Iéna, 1912.

[15] Dufour A. et Prunier F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1937, **204**, 1025 et 1939, **208**, 988; *J. Physique Rad.*, 1942, **3**, 153; *Archives des Sciences physiques et naturelles*, Genève, 1946, **28**, fasc. 5.

[16] Metz A. et Prunier F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 185.

[17] Langevin P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1937, **205**, 51.

[18] Metz A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 597.

[19] Metz A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 705.

LETTRES A LA RÉDACTION

REPONSES DANS L'ULTRAVIOLET LOINTAIN DE PHOTOMULTIPLICATEURS RECOUVERTS DE POUDRES FLUORESCENTES

Par Mme SIMONE ROBIN
et M. VLADIMIR SCHWETZOFF,
Laboratoire de Physique-Enseignement
de la Sorbonne.

La spectrophotométrie photoélectrique dans l'ultraviolet lointain peut se faire soit par photoémission directe, soit par la méthode de fluorescence.

La première méthode nécessite des récepteurs (cellules ou multiplicateurs) à fenêtres transparentes dans cette région [1, 2, 3, 4].

La deuxième méthode, moins directe, consiste à recevoir la lumière ultraviolette sur une couche fluorescente et à faire agir la lumière de fluorescence sur un récepteur photoélectrique commercial, sensible seulement au visible ou au proche ultraviolet [5, 6].

Il est intéressant de comparer ces deux méthodes et d'en tirer des renseignements sur les caractéristiques de l'ensemble source-appareil dispersif-récepteur. Nous considérerons donc ici les résultats obtenus d'une part par la méthode de fluorescence avec des multiplicateurs E. M. I. et d'autre part avec un multiplicateur d'électrons construit par l'un de nous [4]. Le multiplicateur E. M. I. utilisé a un facteur de multiplication de $3,5.10^7$ et un courant d'obscurité de 2.10^{-8} A sous 160 V : étage. Les mesures sont faites à l'aide du monochromateur à vide déjà décrit [5] avec une lampe à hydrogène en quartz débitant 800 mA et à fenêtre de fluorine; la largeur de la fente correspond à 10 Å, le faisceau subit une réflexion à 45° sur un miroir entre la fente d'entrée et le réseau, qui est du type aluminium sur verre.

La courbe de la figure 1 est la courbe de réponse brute du multiplicateur jusque dans le visible.

Sur la fignre 2 la courbe 1 est la réponse brute du multiplicateur placé directement derrière la fente de sortie du monochromateur (en faisant le vide entre la fente de sortie et le multiplicateur). Nous constatons un faible maximum de fluorescence du verre à 1608 Å et il subsiste à 1000 Å (c'est-à-dire lorsque la fenêtre de la lampe ne laisse plus rien passer) une diffusion de 6.10^{-8} A. Cette diffusion est due à la très grande sensibilité de ce multiplicateur autour de 4000 Å et à la diffusion du réseau (notre réseau présente quelques plages diffusantes très caractérisées et il ne nous a pas été possible de nous procurer un réseau absolument satisfaisant jusqu'ici).

La courbe 2 est la réponse du multiplicateur avec une fenêtre de quartz derrière la fente de sortie. Il apparaît une légère pointe de fluorescence à 1608 Å.

La courbe 3 est la réponse du multiplicateur avec du salicylate de Na déposé directement sur le verre supportant la cathode. Le rapport $\frac{I_u}{I_d}$ (I_u, courant utile à 1608 Å; I_d, lumière diffusée) est de 25 alors

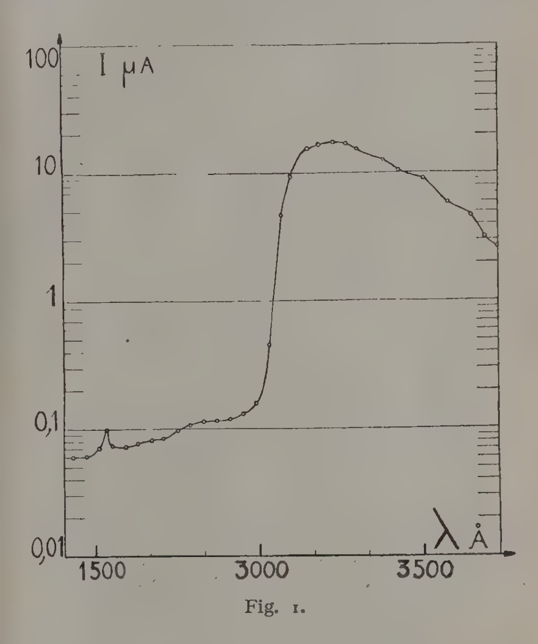


Fig. 1.

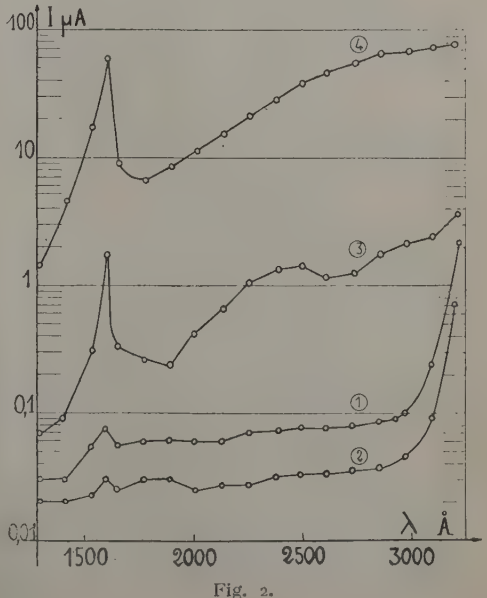


Fig. 2.

qu'il est de 257 (¹) pour notre multiplicateur à fenêtre de quartz soufflé, en émission directe. On voit donc que notre multiplicateur donne des résultats bien meilleurs que la méthode de fluorescence dans l'ultra-violet lointain.

Enfin, la courbe 4 donne la réponse après réflexion sur une couche épaisse de salicylate de Na placée à 45°. Cette méthode présente le grand avantage d'être reproductible contrairement aux mesures faites par transmission à travers le dépôt qui dépendent beaucoup de l'épaisseur de la couche. Dans cette méthode, la poudre fluorescente renvoie également la lumière de diffusion de courte longueur d'onde mais de cette manière, nous améliorons sensiblement notre rapport $\frac{I_u}{I_d}$, qui prend la valeur 55. A titre de comparaison, un photomultiplicateur IP 28 de la R. C. A. donne $\frac{I_u}{I_d} = 10$ dans ces mêmes conditions.

Nous voyons une coupure brusque vers 3 300 Å, c'est-à-dire à la limite de transparence du verre et un maximum vers 3 900 Å. Avec les substances fluorescentes utilisées jusqu'ici, nos résultats montrent qu'il est plus intéressant d'utiliser dans la région de Schumann, la photoémission directe. En outre, nous avons observé que le salicylate de Na est de loin le meilleur écran fluorescent, ce qui est conforme aux résultats récents publiés ailleurs [6].

[1] Schwetzoff V. et Robin Mme S. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 1759.
[2] Dunkelman L. et Lock C. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1951, **41**, 802.
[3] Schwetzoff V. et Robin Mme S. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 316.
[4] Schwetzoff V. et Robin Mme S. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 426.
[5] Robin Mme S. et Vodar B. — *J. Phys. Rad.*, 1951, **12**, 634.
[6] Johnson F. S., Watanabe K. et Tousey R. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1951, **41**, 702.

(¹) Ordre de grandeur précédemment indiqué [4] comme égal à 100.

Manuscrit reçu le 27 février 1952.

SUR LE NOMBRE EFFECTIF DES ÉLECTRONS LIBRES DANS L'ALUMINIUM

Par F. Abelès,
Institut d'Optique, Paris.

Nous nous proposons de montrer que quelques-unes des propriétés physiques de l'aluminium s'expliquent bien en supposant qu'il ne comporte que des électrons libres, c'est-à-dire en prenant pour ce métal le modèle le plus simple possible. Nous supposerons que l'aluminium est trivalent dans l'état métallique. Il y a au moins trois raisons en faveur de cette hypothèse :

1° dans les structures des alliages déterminées par la loi de Hume-Rothery, il contribue toujours avec trois électrons;

2° dans la variation de la résistance électrique des alliages contenant Cu, Ge, Zn, Ag, Cd et Mg, il contribue, suivant la régle de Linde, avec 2,5 électrons par atome [1];

3° la largeur de la distribution de Fermi déduite de l'émission des rayons X mous est en accord avec cette hypothèse [2].

L'idée que l'aluminium est un métal à électrons libres nous a été suggérée par les mesures des facteurs de réflexion entre 0,4 et 1 μ que nous avons effectuées sur des couches opaques de ce métal évaporées dans le vide. Nos résultats concordent parfaitement avec ceux obtenus par O'Bryan [3] et Hass [4] sur des couches opaques évaporées et étudiées sous vide entre 0,405 et 0,644 μ. La variation de l'indice de réfraction complexe $n - ik$ avec la longueur d'onde est bien représentée par la formule de Drude, qui suppose les électrons libres et tient compte de leur libre parcours fini, formule que l'on retrouve aussi dans la théorie quantique des métaux [5]. Cette formule n'introduit que deux paramètres λ_0 et λ_τ et, étant donné qu'ils suffisent pour représenter les variations de $n - ik$ avec λ dans un intervalle assez large, ceci nous paraît en faveur de l'hypothèse que nous proposons. On obtient pour λ_0 et λ_τ les valeurs suivantes :

$$\text{O'Bryan}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\lambda_0^2} = (1{,}071 \pm 0{,}031).10^{-4}\,\text{m}\mu^{-2},\\ \lambda_\tau = 1{,}81 \pm 0{,}069\,\mu;\end{array}\right.$$

$$\text{Hass}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\lambda_0^2} = (1{,}089 \pm 0{,}098).10^{-4}\,\text{m}\mu^{-2},\\ \lambda_\tau = 2{,}306 \pm 0{,}307\,\mu.\end{array}\right.$$

On voit que les deux séries de mesures donnent sensiblement la même valeur pour λ_0. On en déduit qu'il y a un nombre effectif $n_{eff} = 2$ d'électrons libres par atome, autrement dit chaque électron de valence se comporte comme s'il était libre et avait une masse effective qui serait 1,5 fois la masse d'un électron. Théoriquement, λ_τ est relié au libre parcours moyen, c'est-à-dire à la conductibilité électrique σ, par la relation $\sigma = \frac{c\lambda_\tau}{2\lambda_0^2}$ en u. e. s., où $c = 3.10^{10}$ cm.s⁻¹, mais la valeur déduite des mesures optiques est environ 12 fois plus faible que celle déduite des mesures en courant continu sur le métal massif. On constate aussi que les deux valeurs de λ_τ que nous avons calculées diffèrent entre elles, probablement parce que cette quantité est plus sensible aux erreurs de mesure. Il aurait été intéressant de connaître les résistivités des couches étudiées optiquement. De toute façon, c'est un fait à peu près général que la valeur de σ déduite des mesures optiques est très inférieure à celle qui est mesurée électriquement.

La mesure du facteur de réflexion de couches épaisses d'aluminium pour $400\ \text{Å} \leq \lambda \leq 4\,400\ \text{Å}$ [6] donne des résultats qui sont en assez bon accord avec les prévisions de la théorie. En particulier, l'aluminium est transparent pour $\lambda \leq \lambda_0 = 970$ Å.

La mesure des chaleurs spécifiques aux basses températures [7] montre que, si l'on suppose l'aluminium trivalent, les électrons se comportent comme s'ils étaient libres et avaient une masse effective 1,61 fois la masse électronique. Ce résultat est en bon accord avec celui que nous venons de déduire des mesures optiques.

Le paramagnétisme des électrons de conductibilité, obtenu en soustrayant le diamagnétisme des ions, est $2{,}6.10^{-6}$ par centimètre cube [8], tandis que la valeur calculée à partir de la formule relative aux électrons libres en supposant $n_{\text{eff}} = \frac{3}{1{,}61}$ est 2.10^{-6}. L'accord est assez satisfaisant, compte tenu de ce que nous ne connaissons pas bien la susceptibilité diamagnétique de l'ion aluminium.

La constante de Hall mesurée est

$$A_{\text{H}} = -3{,}0.10^{-12}\ \text{V : cm.A.gauss},$$

tandis que sa valeur calculée en supposant trois électrons de valence par atome est $A_{\text{H}} = -3{,}4.10^{-12}$ [9]. Étant donné que A_{H} ne dépend que du nombre des électrons de valence et non de n_{eff}, ceci constitue un autre argument en faveur de l'hypothèse suivant laquelle l'aluminium serait un métal à électrons libres.

Il y a pourtant quelques propriétés physiques qui paraissent contredire cette hypothèse. La mesure des conductibilités thermiques aux basses températures conduit à des valeurs de n_{eff} comprises entre 0,05 [10] et 0,061 [11]. Ceci ne contredit pas d'une façon définitive notre hypothèse, car pour les métaux monovalents Au et Cu pour lesquels on sait que $n_{\text{eff}} \sim 1$, les mêmes mesures conduisent à $n_{\text{eff}} = 0{,}04$ et 0,03 respectivement.

La conductibilité électrique de l'aluminium a conduit les théoriciens à supposer que $n_{\text{eff}} \sim 0{,}2$, mais on manque de calculs théoriques plus détaillés à ce sujet.

En conclusion, les résultats concernant les variations des propriétés optiques avec la fréquence, les chaleurs spécifiques aux basses températures, la susceptibilité magnétique et l'effet Hall pour l'aluminium sont tous compatibles avec l'hypothèse qu'il est un métal trivalent à électrons libres, dont la masse effective serait 1,5 à 1,6 fois la masse électronique.

[1] Robinson A. T. et Dorn J. E. — *J. Metals*, 1951, **3**, 457.
[2] Seitz F. — *The modern theory of solids*, 1940, p. 440.
[3] O'Bryan H. M. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1936, **26**, 122.
[4] Hass G. — *Optik*, 1946, **1**, 8.
[5] Mott N. F. et Jones H. — *The theory of the properties of metals and alloys*, 1936, p. 112.
[6] Sabine G. B. — *Phys. Rev.*, 1939, **55**, 1064.
[7] Seitz F. — *The modern theory of solids*, 1940, p. 153.
[8] Sommerfeld A. et Bethe H. — *Handbuch der Physik*, 1933, **24**, n° 2, 475.
[9] Seitz F. — *The modern theory of solids*, 1940, p. 183.
[10] Hulm J. K. — *Proc. Roy. Soc.*, 1951, **204** A, 98.
[11] Andrews F. A., Webber R. T. et Spohr D. A. — *Phys. Rev.*, 1951, **84**, 994.

Manuscrit reçu le 23 février 1952.

UN LIQUÉFACTEUR D'HÉLIUM A GRAND DÉBIT

Par L. Weil,
Laboratoires de Grenoble du C. N. R. S.

Le liquéfacteur d'hélium dont vous venons d'achever la construction est du type classique à refroidissement par effet Joule-Thomson du gaz préalablement amené au-dessous du point d'inversion par passage dans l'azote liquide et l'hydrogène liquide bouillant sous pression réduite. Nous avons prévu le passage de 8 m³ de gaz par heure, correspondant, pour une pression de 25 kg : cm² et une température de 14° K à l'entrée de l'échangeur final, à un rendement théorique [1] de 19 pour 100, soit à un débit de 2 l : h de liquide.

La figure ci-contre donne le schéma général, tant du liquéfacteur proprement dit, que de la circulation et de la prépurification du gaz. Une description détaillée en sera donnée ultérieurement. Voici quelques

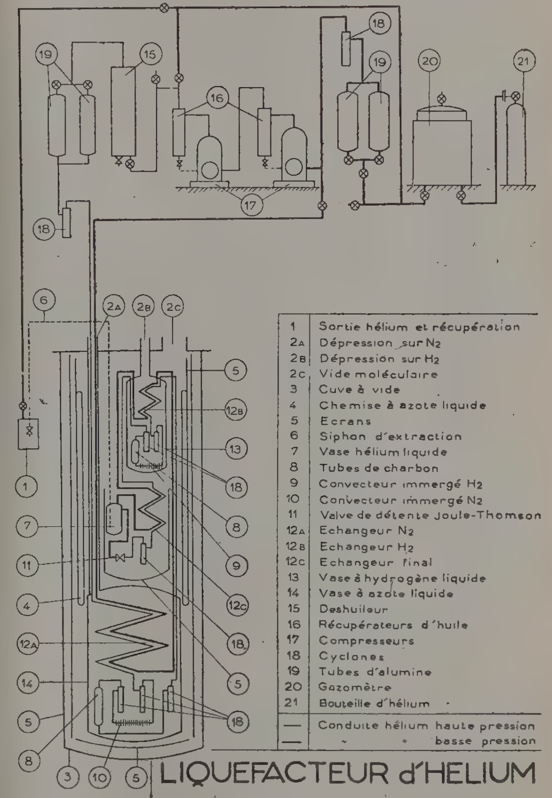


Fig. 1.

caractères particuliers de l'appareil : l'isolement thermique, le fonctionnement automatique, en particulier pour l'alimentation en azote et hydrogène liquide, l'importance des groupes de purification.

L'ensemble de l'appareil est placé dans une cuve en tôle d'acier, mobile, fermée par un couvercle fixe, par l'intermédiaire d'un joint toroïdal, dans laquelle on établit un vide moléculaire. On supprime ainsi toute conduction entre les divers étages et avec le milieu ambiant. Pour supprimer le rayonnement, on a fixé, sans contact thermique notable, un écran d'aluminium à l'intérieur de la cuve, et immédiatement autour du groupe de refroidissement par l'hydrogène et de l'échangeur final déjà protégé par un écran en cuivre, une chemise d'azote liquide; on assure ainsi un refroidissement rapide. Les seules pertes résiduelles proviennent de la conduction

métallique des diverses conduites vers la plaque support. Elles sont réduites par le choix de tubes minces, le plus souvent en monel ou constantan, peu conducteurs.

L'alimentation automatique en hydrogène liquide est commandée par la pression d'hydrogène dans un bulbe placé au niveau désiré. Quand il est immergé, il y règne la même pression qu'au-dessus du liquide; un dispositif différentiel coupe alors le courant dans la vanne d'alimentation, ce qui la ferme. Un bulbe à azote commande de même l'alimentation en azote liquide.

La purification est assurée par refroidissement : on a prévu des échangeurs avec tubes à grand diamètre et intercalé des cyclones pour séparer les impuretés condensées; plusieurs d'entre eux sont reliés à l'extérieur pour permettre le rejet en cours d'opération. De plus des tubes de cuivre contenant du charbon actif sont immergés dans l'azote liquide et, en nombre plus réduit, dans l'hydrogène liquide.

Tous les échangeurs ont été calculés par les formules [2] dont nous avions éprouvé la validité pour notre liquéfacteur d'hydrogène et d'après des expériences faites à notre laboratoire [3]. La consommation d'hydrogène liquide est minime. Les pertes de charge mesurées sont en bon accord avec le calcul; en particulier en basse pression où elles influent sur le rendement, l'écart ne dépasse pas 50 g : cm².

L'appareil est actuellement alimenté par un compresseur formé de deux compresseurs frigorifiques du commerce placés en série (le deuxième muni par nos soins d'un refroidissement par eau), ce qui limite la pression à 15 kg : cm² à l'entrée de l'échangeur final (12 *c*). La pompe — utilisée provisoirement — faisant bouillir l'hydrogène sous pression réduite n'ayant pas un débit suffisant a limité à 16,5° la température à l'entrée de l'échangeur (12 *c*). En définitive, le rendement théorique tombe à 10 pour 100 et nous avons obtenu effectivement un débit de 1,2 l : h dans le premier essai.

Manuscrit reçu le 21 février 1952.

[1] Keesom. — Hélium, Elsevier, Amsterdam.
[2] Mac Adams. — Heat transmission, traduction française, Dunod, Paris.
[3] Weil L. et Lacaze A. — *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 890 et 1951, **12**, 45.

ESSAI DE DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE LA DISTANCE ENTRE DEUX ÉLECTRONS EN INTERACTION

Par R. Forrer,
Institut de Physique, Strasbourg.

Le mécanisme des interactions électroniques auxquelles nous attribuons l'état cristallin est encore inconnu. Une étude préliminaire [1] a montré qu'une condition nécessaire pour la production de ces interactions est la pénétration mutuelle des couches électroniques à une profondeur bien précise. La discontinuité de 14°, observée expérimentalement, d'un facteur F qui intervient dans le mécanisme d'interaction suggère que cette dernière se compose d'un certain nombre n_φ d'interactions élémentaires φ *identiques*. Cette identité des interactions élémentaires ne peut se concevoir qu'avec des conditions identiques parmi lesquelles nous comptons la distance δ_φ entre les deux électrons à l'instant même de leur interaction. Il serait intéressant de tenter la détermination expérimentale de cette distance δ_φ. On peut y arriver de la façon suivante :

Dans certains diagrammes d'alliages (par exemple Fe—N) on constate l'existence du même système cristallin dans deux phases distinctes séparées par un domaine à deux phases; on constate pourtant dans Fe—N, γ et γ' par exemple que l'augmentation de la maille est proportionnelle au titre en azote, même à travers les deux phases distinctes. Le mécanisme de détail proposé ci-dessous expliquerait l'existence de deux phases et donnerait la distance δ_φ. Admettons qu'au moment d'une interaction élémentaire deux positions mutuelles des deux électrons soient possibles, soit que chaque électron se trouve du côté de l'atome auquel il appartient, soit que chaque électron pénètre d'abord à l'intérieur de l'orbite de l'atome voisin. Si pour ces mécanismes différents le facteur F et le diamètre des couches électroniques ne varient pas, il en résulte l'existence de deux distances atomiques différentes d' et d dont la demi-différence correspondrait à δ_φ. Si l'on trouve, malgré certaines altérations possibles (variation de F ou du diamètre atomique) dans des cas expérimentaux divers une valeur constante pour $d' - d$, l'attribution de ce fait à l'existence d'une valeur constante δ_φ de la distance entre les électrons en interaction devient alors probable.

La différence de la distance des atomes de Fe dans les phases γ' et γ dans le diagramme des Fe—N à la température de l'eutectique E donne $d' - d = 0{,}097$ Å [2].

Une détermination de $d' - d$ particulièrement sûre peut être déduite des deux phases Pd—H, γ' et γ dont les distances atomiques ont été mesurées par plusieurs auteurs [3]; la moyenne de 10 mesures donne $0{,}0966 \pm 0{,}0015$ Å, valeur identique (aux erreurs d'expérience près) à celle déduite du système Fe—N.

On trouve encore une différence de distances $d' - d$ de même ordre de grandeur dans le réseau de quelques corps (U : 0,093 Å; Ni pulvérisé dans N_2, tétragonal : 0,095 Å; Fe_2O_3 α : 0,09 Å; aussi dans MnP, CrP, CrAs, FeAs, NiGe, PdSi, PdSn, PtSi, PtGe, IrGe, RhSb [4]).

Le fait qu'un assez grand nombre de cas nous donnent des valeurs étroitement groupées parle pour l'intervention d'un même mécanisme. Si nous attribuons suivant notre hypothèse de départ cette variation discontinue de distance au mécanisme électronique cité plus haut, nous pouvons en déduire pour la distance entre deux électrons en interaction $\delta_\varphi = \dfrac{d' - d}{2} = 0{,}048$ Å. Nous constatons que cette grandeur est égale à deux fois la longueur d'onde de Compton $\left(2\lambda_C = \dfrac{2h}{mc} = 0{,}0485_2 \text{ Å}\right)$. Nous croyons pouvoir conclure de cette coïncidence que la distance δ_φ de deux électrons en interaction est égale à $2\lambda_C$.

[1] Forrer R. — *J. Chim. Phys.*, 1949, **46**, 561.

[2] EISENHUT O. et KAUPP E. — Z. *Elektrochem.*, 1930, **36**, 392.

[3] KRÜGER F. et GEHM G. — *Ann. Physik*, 1933, **16**, 114. — ROSENHALL G. — *Ann. Physik*, 1933, **18**, 150. — CHAUDRON G., PORTEVIN A. et MOREAU L. — *C. R. Acad. Sc.*, 1938, **207**, 235.

[4] PFISTERER H. et SCHUBERT K. — *Metallkunde*, 1950, **41**, 358.

Manuscrit reçu le 23 février 1952.

SUR UN NOUVEAU TYPE DE FORCES INTERIONIQUES

Par ANDRÉ HERPIN,
Commissariat à l'Énergie atomique. Fort de Châtillon.

On sait que les relations de Cauchy sont démontrées sous les hypothèses suivantes : les forces interioniques ne dépendent que de la distance (forces centrales), au cours d'une déformation, les ions se déplacent comme s'ils appartenaient à un continuum. Les relations de Cauchy n'étant pratiquement jamais satisfaites, on a cherché à se libérer de ces hypothèses, et en général, ce fut à la première qu'on s'attaqua, car la seconde est inébranlable pour les cristaux à haute symétrie, en particulier lorsque chaque ion est un centre de symétrie.

Dans la théorie atomique des solides, on doit expliquer les forces interioniques en considérant les ions comme formés d'un noyau entouré de couches électroniques à symétrie sphérique, tout au moins pour les ions normaux (non paramagnétiques). Avec un tel modèle, et pour un cristal à haute symétrie (c'est le cas de tous les cristaux à caractère ionique marqué), il est impossible de faire apparaître un écart aux relations de Cauchy si l'on n'envisage pas *la déformation des ions sous l'effet du champ cristallin*. Nous avons mis en évidence que cette déformation existe même si la symétrie du cristal est élevée et quelle peut être estimée.

Nous considérons un solide formé d'ions a, b, c, ..., de valences respectives z_a, z_b, z_c, ..., que nous déformons, le déplacement de l'ion a ayant pour composantes u_α^a ($\alpha = 1, 2, 3$), et nous calculons son énergie potentielle U en fonction des déplacements. On obtient, en utilisant la formule des approximations successives :

$$U = (0 | U | 0) + \sum_i \frac{|(i | U | 0)|^2}{E_i - E_0},$$

o est l'état fondamental du solide et i un état excité quelconque, E_0 et E_i étant les énergies correspondantes. Le premier terme correspond à l'énergie électrostatique (énergie de Madelung-forces répulsives entre atmosphères électroniques-forces d'échange). Ce n'est que dans le second terme qu'on peut faire apparaître la déformabilité des ions. On y trouve les forces de Van der Waals provenant d'une interaction dipôle-dipôle ou dipôle-quadrupôle; pour les obtenir, il faut considérer les états i dans lequel deux ions a et b sont dans un état excité. Mais dans un cristal ionique, il existe des termes beaucoup plus intéressants correspondants à des états i dans lesquels un seul des ions a, par exemple, est dans un état excité. Si, dans la transition o, i, apparaît un moment dipolaire défini par sa valeur quadratique moyenne $M_{0,i}^2(a)$, on obtient comme contribution au potentiel élastique (quadratique par rapport aux déplacements) :

$$U_{\text{él}} = \sum_a U_{\text{él}}^a,$$

$$U_{\text{él}}^a = \sum_b \mathop{S}_{\alpha\beta\gamma} \Big\{ \sum_c z_c \Gamma_\alpha^0(a, c) \Big\} \times z_b \Gamma_\alpha^{\beta\gamma}(a, b) P_a (u_\beta^a - u_\beta^b)(u_\gamma^a - u_\gamma^c)$$
$$+ \sum_{b,c} \mathop{S}_{\alpha\beta\gamma} z_b z_c \Gamma_\alpha^\beta(a, b) \times \Gamma_\alpha^\gamma(a, c) P_a (u_\beta^a - u_\beta^b)(u_\gamma^a - u_\gamma^c),$$

$$P_a = \sum_i \frac{M_{0i}^2(a)}{E_0 - E_i},$$

avec

$$\Gamma_\alpha^0(a, b) = -e^2 \frac{r_\alpha}{r^3}; \qquad \Gamma_\alpha^\beta(a, b) = e^2 \left(z \frac{r_\alpha r_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} \right),$$

$$\Gamma_\alpha^{\beta\gamma} = -e^2 \left(\frac{15}{2} \frac{r_\alpha r_\beta r_\gamma}{r^7} - \frac{3}{2} \frac{r_\alpha \delta_{\beta\gamma}}{r^5} \right)$$

(r = distance des ions).

Cette énergie d'aspect assez inhabituel correspond au couplage de l'ion a déformé dans le champ créé par le déplacement des ions b et c. La première ligne disparaît si chaque ion est un centre de symétrie. Il reste cependant, pour des déplacements quelconques, la seconde ligne qui correspond à un couplage mixte incompatible avec les forces centrales. Mais si la déformation est linéaire (déformation de l'élasticité classique) chaque atome reste, pendant la déformation, centre de symétrie de l'ensemble, et le second terme disparaît également. On peut donc en conclure que le type de force que nous considérons contribue aux forces interioniques dans une déformation quelconque (par exemple de la branche optique) mais ne peut être responsable des écarts aux formules de Cauchy.

Nous n'avons envisagé que le couplage par l'intermédiaire du moment dipolaire induit dans un ion par le champ cristallin déformé par le déplacement des voisins. Mais on peut également considérer le couplage par l'intermédiaire du moment quadrupolaire induit. Le résultat est tout à fait analogue à (2), avec des valeurs différentes des coefficients Γ, mais la force n'est plus nulle dans une déformation linéaire. On doit donc penser que *pour des solides à caractère ionique marqué* (NaCl, MgO par exemple), *les écarts aux relations de Cauchy peuvent s'expliquer par le couplage d'un ion déformé avec le champ résultant du déplacement des voisins.*

Un calcul grossier montre que les forces sont de même ordre que les forces de Van der Waals. Elles sont d'autant plus grandes que la valence des ions est plus forte et que leur polarisabilité est plus grande, ce que confirme l'expérience (l'écart aux relations de Cauchy est plus fort pour MgO que pour NaCl).

Ces calculs montrent de plus que l'énergie potentielle du réseau doit s'écrire sous la forme

$$U = \sum_{a,b,c} \mathop{S}_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}^{a,b,c} (u_\alpha^a - u_\alpha^b)(u_\beta^a - u_\beta^c),$$

plus générale que celle utilisée habituellement.

Manuscrit reçu le 19 février 1952.

SUR LES RAYONNEMENTS γ ET X ÉMIS PAR LE POLONIUM 210

Par Michel Riou,
Institut du Radium, Laboratoire Curie.

Sommaire. — Détermination des intensités absolues des divers rayonnements. Alors que le rayonnement K du plomb est dû à la conversion interne d'une raie γ de 800 keV, le rayonnement L est excité essentiellement par les rayons α dans les atomes de plomb contenus dans les sources de polonium.

Des travaux récents [1, 2, 3] confirmant des travaux plus anciens [4, 5] ont montré qu'en plus des rayons α le polonium 210 (Ra*F*) émet en faible intensité les rayonnements K et L du plomb, et une raie γ de 800 keV.

Nous avons repris l'étude de ces rayonnements par la méthode d'absorption simple ou sélective, les rayonnements K et L étant détectés par un compteur Geiger-Müller à xénon de rendement élevé [6] (0,07 et 0,60) et le rayonnement γ par un compteur à paroi de plomb. Nous avons utilisé une source de 11,1 mC déposée sur argent, puis une source de 8,1 mC déposée sur plexiglass [7]. Les sources sont recouvertes par une feuille mince pour éviter les effets secondaires dus aux rayons α; les rayons β dus à des impuretés (10^{-7} rayons β par rayons α) sont éliminés par champ magnétique ou écrans.

Par absorption sélective, nous avons vérifié que ce sont bien les rayonnements L et K du plomb qui sont émis, avec une intensité respective de $(2,2 \pm 0,5).10^{-4}$ et $(1,6 \pm 0,5).10^{-6}$ photons par rayon α. L'intensité du rayonnement γ de 800 keV est de $(1,6 \pm 0,2).10^{-5}$ photons par rayon α. Sauf pour le rayonnement L, ces intensités sont en bon accord avec celles obtenues par les autres auteurs [3, 9].

Nous n'avons observé aucun autre rayonnement électromagnétique, particulièrement dans la région 15-100 keV, mis à part le rayonnement K de l'argent qui n'apparaît qu'avec la source déposée sur argent, son intensité étant de 2.10^{-5} photons par rayon α absorbé dans le support.

Ce résultat et d'autres [4, 8] permettent d'établir la formule empirique suivante donnant le nombre n_k de photons K excités par les rayons α absorbés dans un élément de numéro atomique Z :

$$\log_{10}\left(\frac{n_k}{w_k}\right) = 1,50 - 0,13 Z = 1,50 - 1,17\sqrt{E_k},$$

où w_k est le rendement de fluorescecce dans la couche K et E_k l'énergie de liaison de cette couche. Pour $Z = 82$, on obtient ainsi $n_k = 5.10^{-9}$, ce qui est nettement inférieur au nombre de photons K du plomb émis par ^{210}Po et permet donc d'affirmer que ceux-ci sont excités uniquement par la conversion interne de la raie γ de 800 keV [3].

Par contre, la formule empirique pour les photons L :

$$\log_{10}\left(\frac{n_L}{w_L}\right) = 1,80 - 0,051 Z$$

conduit à $n_l = 1,6.10^{-3}$ pour $Z = 82$, ce qui est supérieur au nombre de photons L du plomb émis par les sources de polonium. Ces photons seraient donc dus essentiellement à l'excitation par les rayons α des atomes de plomb présents dans les sources et non à la conversion interne d'une raie γ. On n'observe pas le rayonnement L du polonium, car celui-ci est en quantité insuffisante (2 μg dans 10 mC).

L'origine du rayonnement L est confirmée par la variation de l'intensité suivant les auteurs, ceci dépendant de la teneur des sources en plomb; par le rapport d'intensité des raies $L\alpha$ et $L\beta$ égal à 2, alors que dans le cas de la conversion interne, il est inférieur à 1; par l'étude des électrons de conversion [2] du rayonnement γ de 800 keV, qui conduit à un nombre de photons L égal à 8.10^{-7} par rayon α, inférieur d'un facteur 3.10^{-2} au résultat expérimental; par des expériences de recul [9] qui montrent que le rayonnement L est émis après les rayons α en un temps inférieur à 10^{-1} s, alors que d'après son intensité et d'après la théorie de Gamow il devrait être émis en un temps beaucoup plus long s'il était lié à la désexcitation d'un niveau nucléaire qui serait passé inaperçu, le rayonnement γ étant trop converti; enfin par nos expériences de coïncidences, qui montrent que le rayonnement L n'est pas dû à la conversion interne d'un rayonnement γ émis en cascade avec celui de 800 keV.

On peut donc conclure actuellement que le $^{210}_{84}Po$ n'émet entre 15 et 4 000 keV qu'une seule raie γ de 800 keV, convertie dans la couche K, ce qui provoque l'émission des raies K du plomb. D'après nos résultats, son coefficient de conversion interne dans la couche K est égal à 10 ± 3 pour 100, en bon accord avec la valeur de Grace et al [3], $6,7 \pm 1,7$ pour 100. Les valeurs théoriques montrent que le rayonnement, qui ne peut être que multipolaire électrique d'après les règles de sélection, a une polarité 2^4 ou 2^5. L'étude par recul [9] et celle des électrons de conversion [2] conduisent à choisir la polarité 2^4 ou 2^3.

Pour de telles polarités les théories de l'émission α conduisent à des valeurs de la probabilité d'excitation du niveau nucléaire de 800 keV nettement inférieures à la probabilité expérimentale $(1,8.10^{-5})$.

Manuscrit reçu le 18 février 1952.

Note ajoutée à la correction des épreuves. — De Benedetti et Minton, (*Phys. Rev.*, 1952, 85, 944) viennent d'étudier les corrélations angulaires entre les rayons α et le rayonnement γ de 800 keV ; ils en concluent que celui-ci doit être un rayonnement quadripolaire électrique. La valeur théorique du coefficient de conversion interne dans la couche K est alors égale à 0,9 pour cent, ce qui est difficilement compatible avec les valeurs expérimentales.

[1] Rubinson et Bernstein. — *Phys. Rev.*, 1951, **82**, 334.
[2] Alburger et Friedlander. — *Phys. Rev.*, 1951, **81**, 523.
[3] Grace, Allen, Wast et Halban. — *Proc. Phys. Soc.*, 1951, **64**, 493.
[4] Curie I. et Joliot F. — *J. Physique Rad.*, 1951, **2**, 20.
[5] Siegbahn et Slätis. — *Arkiv. Mat. Ast. Fys.*, 1947, **35** A, 3.
[6] Riou. — *J. Physique Rad.*, 1951, **11**, 185.
[7] Nous remercions MM. Bouissières et Conte, qui ont préparé ces sources.
[8] Bothe et Franz. — *Z. Physik*, 1928, **52**, 466.
[9] Zajac, Broda et Feather. — *Proc. Phys. Soc.*, 1948, **60**, 501.

SUR LA NATURE DES LIAISONS CHIMIQUES ET MÉTALLIQUES

Par T. C. Owe Berg,
Avesta, Suède.

Dans un précédent article [1] j'avais attiré l'attention sur le fait que les énergies de cohésion des métaux de la quatrième période sont proportionnelles au nombre d'électrons de liaison, chaque électron de liaison contribuant pour 25 kcal : mol. Cette proportionnalité est de règle également pour les autres périodes, quoique la contribution d'un électron change avec la période. Les énergies de cohésion les mieux connues sont celles de Li et Be, qui ont des chaleurs de sublimation de 37 et 75 kcal : mol., respectivement. La même règle semble s'appliquer aux chaleurs de formation des sels des métaux alcalins et alcalino-terreux. Les données du tableau I proviennent du *Handbook of Chemistry and Physics* de 1949. Deux valeurs y figurent, la première correspond au sel solide, la seconde à la solution diluée, toutes deux exprimées en kilocalories par molécule de sel.

Le tableau II donne le rapport des chaleurs de formation des sels de métaux mono et bivalents correspondants, c'est-à-dire appartenant à la même période. Pour les ions bivalents négatifs, les chaleurs de formation par atome-gramme de métal ont été utilisées pour le calcul de ces rapports.

Tableau I.

Chaleurs de formation des sels alcalins et alcalino-terreux.

	F.	Cl.	Br.	I.	OH.	SH.	NO_3.	SO_4.	CO_3.
Li	146	97	84	65	116	–	116	338	291
	145	106	95	80	121	64	116	–	294
Na	136	98	86	69	102	–	112	326	271
	136	97	86	71	112	–	107	327	276
K	134	104	94	79	102	–	119	339	275
	138	100	89	74	115	64	110	332	281
Rb	133	105	96	81	101	–	120	340	274
	139	101	90	74	–	–	111	333	283
Cs	132	106	97	84	100	–	122	341	273
	140	102	91	76	107	–	112	336	285
Be	–	113	–	67	207	–	–	276	–
	241	–	–	–	–	–	185	–	–
Mg	–	153	124	87	219	–	–	301	267
	–	–	167	137	–	117	210	321	–
Ca	286	191	162	129	236	–	225	336	–
	–	–	187	156	239	137	229	–	288
Ba	288	205	180	145	226	–	238	345	291
	–	208	185	155	237	136	228	339	–

Tableau II.

Rapports des chaleurs de formation des sels de métaux correspondants.

	F.	Cl.	Br.	I.	OH.	SH.	NO_3.	SO_4.	CO_3.
Be/Li	–	1,16	–	1,03	1,78	–	–	1,63	–
	1,66	–	–	–	–	–	1,59	–	–
Mg/Na	–	1,56	1,44	1,26	2,14	–	–	1,85	1,97
	–	–	1,94	1,93	–	–	1,96	1,96	–
Ca/K	2,07	1,84	1,72	1,63	2,32	–	1,89	1,98	–
	–	–	2,10	2,11	2,08	2,14	2,08	–	2,05
Ba/Rb	2,16	1,95	1,88	1,79	2,24	–	1,98	2,03	2,13
	–	2,06	2,06	2,09	–	–	2,04	2,04	–

Si l'on écarte les petits atomes Li et Be, la proportionnalité est évidente, particulièrement pour les solutions diluées. Les chlorures de In présentent un cas encore plus frappant, avec les chaleurs de formation, 45 pour InCl, 87 pour $InCl_2$ et 129 pour $InCl_3$.

Cette proportionnalité est si frappante qu'il faut lui rendre compte en considérant le mécanisme de liaison. Une conséquence immédiate est que le potentiel de chaque électron de liaison est indépendant du nombre des électrons de liaison.

Le présent travail a été effectué au laboratoire de recherches de la Compagnie Avesta Jernverks AB. Je remercie la direction de cette Compagnie d'en avoir autorisé la publication.

[1] *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 418-429.

Manuscrit reçu le 11 février 1952.

FAMILLES D'ÉCRANS APODISANTS, CIRCULAIRES OU « LINÉAIRES », DE TRANSPARENCE MAXIMUM. GÉNÉRALISATION. FAMILLES D'ÉCRANS SATISFAISANT A PLUSIEURS CONDITIONS SIMULTANÉES

Par Mlle B. Dossier,
Laboratoire A. Cotton, Bellevue.

L'intégrale de diffraction

$$\mathcal{A}(\rho) = 2\pi \int_0^1 T(r) J_0(\pi r \rho) r \, dr,$$

ou

$$\mathcal{A}(\xi) = \int_0^1 T(x) e^{-jx\xi} dx \quad [1]$$

transforme la répartition d'amplitudes $T(r)$ ou $T(x)$ d'un écran absorbant, recouvrant respectivement un objectif circulaire ou linéaire, en une répartition d'amplitudes diffractées $\mathcal{A}(\rho)$ ou $\mathcal{A}(\xi)$ dans le plan focal de cet objectif. Appliquée à un ensemble complet de fonctions T particulières, bases de développements pour des fonctions de transmission quelconques, elle définit un ensemble transformé de fonctions $\mathcal{A}$, bases de développements pour toute figure de diffraction d'écran. Un écran et sa figure de diffraction se trouvent ainsi définis par leurs coordonnées — *identiques* — dans deux espaces fontionnels conjugués, celui des T et celui des $\mathcal{A}$ respectivement. On peut de la sorte traduire toutes les déterminations soit de l'écran, soit de sa figure de diffraction en termes de coordonnées (a_0, ..., a_p, ...) dans le même espace, et définir, pour les propriétés correspondantes, des domaines de compatibilité et des limites.

Naturellement, on ne peut s'intéresser pratiquement qu'à des espaces à nombre restreint, n de dimensions. Or, les limites et les domaines de compatibilité qu'on détermine sont fonctions de n; il est facile de montrer qu'en général, ils s'élargissent quand n croît. Soit, en effet, dans deux espaces à n et $n+1$ dimensions, deux ensembles d'écrans E_n et E_{n+1} répondant à la même définition, c'est-à-dire tels que leurs n ou $n+1$ coordonnées vérifient des relations formellement semblables : E_n est alors *une partie* de E_{n+1}, celle qu'on obtient en posant $a_{n+1} = 0$. Les frontières de E_n qui représentent, au regard de la définition choisie, des écrans limites à n termes ne sont, en général, que des points banaux de E_{n+1}. Il faut le cas exceptionnel de frontières communes à E_{n+1} et à sa partie E_n pour que les écrans limites de E_n puissent remplir la même fonction dans E_{n+1}. On voit qu'autrement, et très généralement, les limites L_n définies dans E_n sont plus strictes que dans E_{n+1}. Ces suites L_n à variation monotone admettent souvent des bornes évidentes (c'est le cas, par exemple, pour des propriétés telles que la transparence totale de l'écran, ou encore pour la largeur à mi-hauteur de l'image, etc.). Elles convergent donc, mais il est impossible de dire *a priori* à partir de quel n la distance à la borne ultime devient négligeable. Dans la plupart des exemples que j'ai traités, cependant, L_n variait assez rapidement avec n et atteignait, pour $n = 3$ ou 4 déjà, des valeurs qu'il était *pratiquement* inutile de dépasser.

Les espaces fonctionnels que j'ai utilisés sont ceux dont les bases ont été décrites dans [1], à savoir, pour $T(r)$:

$$\sqrt{2}, \quad \ldots, \quad \sqrt{2}\frac{J_0(\lambda_p r)}{J_0(\lambda_p)},$$

où λ_p désigne la $p^{\text{ième}}$ racine positive de la fonction de Bessel $J_1(z) = 0$, et pour $T(x)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \ldots, \quad \cos p\pi x.$$

Quant aux propriétés auxquelles je me suis attachée, ce sont simultanément :

a. le taux $K\left(\frac{a_0}{a_p}\right)$ *d'énergie diffractée*, à égalité d'intensité centrale $I(0)$, dans un domaine $\rho_0 < \rho < \rho_1$ ou $\xi_0 < \xi < \xi_1$

$$K\left(\frac{a_p}{a_0}\right) = \frac{E_{\rho_0\rho_1}}{I(0)} \quad \text{ou} \quad \frac{E_{\xi_0\xi_1}}{I(0)};$$

b. la clarté de l'écran : j'ai choisi, pour des raisons de commodité, de définir cette clarté par la somme des amplitudes des vibrations qui traversent l'écran

$$\int_0^1 T(r) 2\pi r \, dr \quad \text{ou} \quad \int_0^1 T(x) \, dx,$$

grandeur qu'on peut facilement relier à la transparence proprement dite des écrans

$$\int_0^1 T^2(r) 2\pi r \, dr \quad \text{ou} \quad \int_0^1 T^2(x) \, dx$$

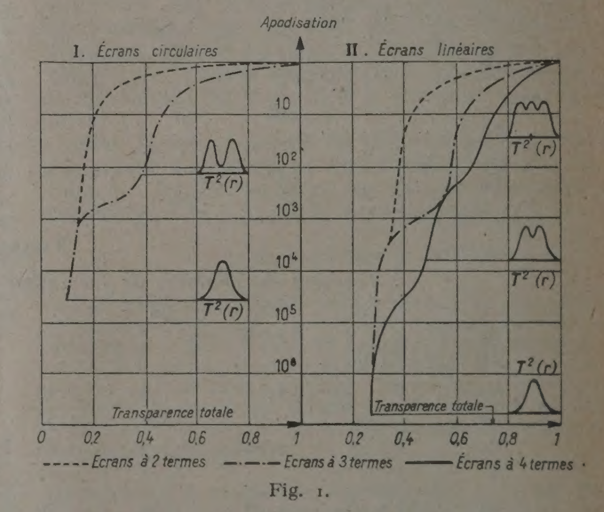


Fig. 1.

Un premier problème se pose alors : étant donné un intervalle $\rho_0\rho_1$ ou $\xi_0\xi_1$, et d'autre part le nombre de termes n choisi, trouver la valeur minimum K_m de $\frac{E}{I(0)}$. J'appellerai apodisation moyenne (dans l'intervalle $\rho_0\rho_1$ ou $\xi_0\xi_1$) le rapport du K_0 relatif à l'écran ordinaire $T = 1$, au K de l'écran $T(r)$ ou $T(x)$. Ce problème de l'apodisation maxima avait déjà été précédemment traité pour les écrans linéaires [2]. Je l'ai récemment repris pour les circulaires.

On trouve, si ρ_0 ou $\xi_0 > 2$, des apodisations moyennes maxima si grandes (par exemple 10^6) qu'elles dépassent largement les besoins pratiques. Or, toute apodisation excessive s'obtient au détriment de la clarté de l'écran. En fait, ces écrans à apodisation *maxima*, surtout les circulaires, sont beaucoup trop sombres (*fig.* 1). D'où ce second problème : déterminer la plus grande clarté compatible avec une apodisation donnée inférieure au maximum. Si l'on ne trouve jamais, en effet, qu'un seul écran à n termes d'apodisation maxima, ce sont, par contre, des *ensembles* entiers d'écrans que l'on obtient pour toute apodisation inférieure. Ces écrans correspondent au même K, mais diffèrent à tous autres égards. D'où la possibilité de choisir, parmi leurs clartés, la plus grande. Ces deux problèmes ont été traités pour plusieurs domaines $\rho_0\rho_1$ ou $\xi_0\xi_1$, et pour plusieurs valeurs de n. La figure 1 indique quelques résultats obtenus.

Je me propose de donner dans une publication plus étendue des détails sur le mode de détermination de ces écrans. La méthode proposée permet, en outre, de contrôler un plus grand nombre de propriétés simultanées, soit de l'écran, soit de sa figure de difffraction. Ce travail a été fait sous la direction de M. Jacquinot à qui j'adresse ici mes remerciements.

[1] DOSSIER B. — *J. Physique*, 1952, **13**, n° 3.
[2] DOSSIER B., BOUGHON P. et JACQUINOT P. — *J. des Recherches du C. N. R. S.*, 1950, **11**, 49-69.

Manuscrit reçu le 14 février 1952.

ABSORPTION A HAUTE TEMPÉRATURE DE QUELQUES MATÉRIAUX OPTIQUES DANS L'ULTRAVIOLET DE SCHUMANN

Par Mlle ANDRÉE GILLES,
Laboratoire de Physique-Enseignement, Sorbonne.

Comme suite à une étude sur la variation avec la température de la transparence du quartz dans l'ultraviolet de Schumann [1], qui a mis en évidence les difficultés d'utilisation des cuves de quartz pour des mesures d'absorption sur des vapeurs à haute température, nous avons été conduite à effectuer une étude similaire sur d'autres matériaux tels que la fluorine, le fluorure de lithium et le corindon.

Nous ne décrirons pas le mode opératoire qui est le même que pour le quartz.

Pour la fluorine et le fluorure de lithium, la transparence ne varie pas d'une façon sensible dans notre région jusqu'à une température limite qui est de 800° pour la fluorine et 600° pour le fluorure de lithium. A cette température, le cristal se dépolit, l'absorption augmente irréversiblement, le cristal restant peu transparent après retour à la température normale et il se produit vraisemblablement une évaporation dans le vide. L'appareillage ne nous permet pas de nous approcher de la partie centrale des bandes d'absorption de ces matériaux.

Pour le corindon, il se produit une augmentation rapide de l'absorption avec la température aux courtes longueurs d'onde. Nous donnons à titre d'exemple des courbes représentant le coefficient d'extinction, en fonction de la longueur d'onde pour un échantillon de corindon de fabrication française à différentes températures (*fig.* 1). Nous avons retrouvé des variations du même ordre pour des échantillons d'une autre origine et de transparence différente.

L'emploi à haute température de cuves non soudées à fenêtres de corindon semble donc sans intérêt dans la région de Schumann. La fluorine et le fluorure de lithium seraient utilisables jusqu'à respectivement 500 et 700° environ.

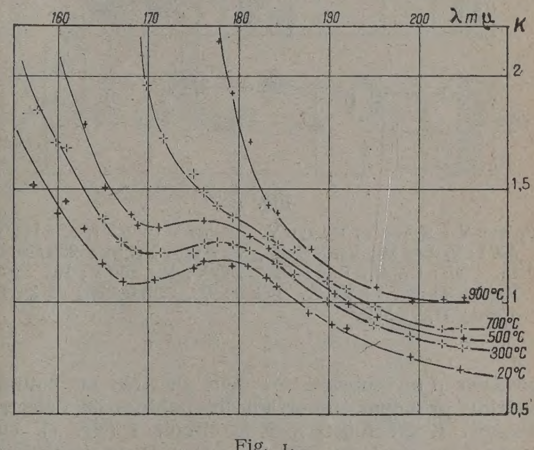


Fig. 1.

[1] GILLES Mlle A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 822.

Manuscrit reçu le 18 février 1952.

UN ENREGISTREUR DE SPECTROMÈTRE DE MASSE A COURT TEMPS DE RÉPONSE

Par RUTH VALENTIN,
Laboratoire de Chimie minérale
de la Faculté des Sciences de Nancy

et GEORGES PHILBERT
Actuellement, Laboratoire de Chimie nucléaire
du Collège de France.

Divers auteurs [1] ont réalisé des spectroscopes de masse de construction simplifiée, destinés aux analyses rapides et à la détection des fuites : une tension périodique est appliquée en même temps aux électrodes d'accélération des ions et à l'une des paires de plaques d'un oscillographe cathodique; à l'autre paire est appliquée une tension proportionnelle au courant ionique. Le spectre des masses apparaît alors sur l'écran. Cette méthode a l'avantage de permettre des enregistrements rapides; mais le balayage du spectre se fait par variation de l'énergie des ions, ce qui entraîne l'impossibilité de mesures quantitatives et toute étude systématique de l'optique ionique.

Nous avons réalisé un dispositif d'enregistrement « rapide » analogue, mais basé sur l'utilisation d'un balayage magnétique et l'avons adapté au spectromètre de masse construit par l'un de nous [2]. Le récepteur peut être constitué par l'écran d'un tube cathodique ou par un enregistreur à stylet du type Lumiscript.

1° Le balayage magnétique est obtenu par superposition d'un courant en dent de scie au courant continu principal traversant les bobines de l'électro-aimant. Il est fourni par le circuit I (*fig.* 1). Une tension en dent de scie U_d (dans la pratique celle de l'oscillographe sur le tube duquel sont observés les spectres) est amplifiée en puissance à l'aide d'un tube 807 précédé de deux tubes préamplificateurs; le courant plaque du 807 est la somme d'une faible composante continue et d'une composante périodique. La proportionnalité de celle-ci à U_d est garantie par la forte contre-réaction sur laquelle repose le principe du circuit.

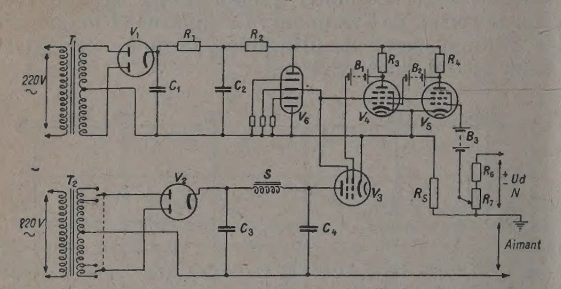


Fig. 1.

T_1, 220 V 2 × 500 V; T_2, 220 V 2 × 600 V (500 V); S, 5 H; V_1, AZ 1; V_2 LG 10; V_3, 807; V_4, V_5, 6 C 6; V_6, St V 280/40; C_1, C_2, 4 µF; C_3, C_4, 10 µF; B_1, 200 V; B_2, 200 V; B_3, 35 V; R_1, 3 kΩ; R_2, 3 kΩ; R_3, 32 kΩ; R_4, 28 kΩ; R_5, 1 kΩ; R_6, 2 MΩ; R_7, 5 MΩ.

L'amplitude maxima du courant en dent de scie est de 60 mA; le courant total d'excitation étant de 500 mA, le domaine spectral susceptible d'être enregistré est au moins égal au quart du spectre total observable.

La fréquence maxima de balayage, limitée par les courants d'induction massique dans le fer de l'électro-aimant et par l'impédance des bobines d'excitation, est de 10 par seconde environ.

2° Les courants d'ions sont amplifiés à l'aide d'un circuit à contre-réaction classique (circuit II, *fig.* 2). L'étage préamplificateur est constitué par un tube électromètre transmettant la tension produite par le courant ionique à travers la résistance R_1. La limite supérieure de la bande passante de l'amplificateur est déterminée par la constante de temps $\theta = r_1 C_1$ (C_1, capacité parasite de R_1; r_1, valeur ohmique de R_1). Avec $\theta \approx \frac{1}{100}$, ce qui correspond aux valeurs usuelles de r_1 et C_1, la fréquence de balayage maxima, telle que les lignes spectrométriques ne soient pas déformées, est de 1 par seconde environ.

Le montage que nous avons réalisé donne la possibilité de procéder à des recherches systématiques, basées sur un très grand nombre de mesures, relatives aux paramètres de fonctionnement d'un spectromètre de masse, à son pouvoir séparateur, à l'optique des sources et des analyseurs. De plus, l'étude des phénomènes transitoires de durée moyenne (1 s) peut être abordée. Des résultats détaillés, accompagnés de photographies de spectres, seront publiés ultérieurement [3].

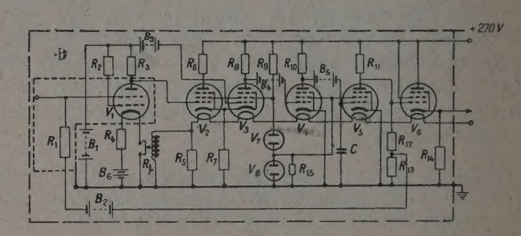


Fig. 2.

V_1, BE 2; V_2, V_3, UF 42; V_4, UF 41; V_5, V_6, UL 41; V_7, V_8, LK 131; R_1, relais; C, 5.10^{-8} F; R_1, 10^{10} Ω; R_2, 50 kΩ; R_3, 150 kΩ; R_4, 15 Ω; R_5, 25 Ω; R_6, 25 kΩ; R_7, 700 Ω; R_8, 25 kΩ; R_9, 2,5 kΩ; R_{10}, 50 kΩ; R_{11}, 12 kΩ; R_{12}, 100 kΩ; R_{13}, 6 kΩ; R_{14}, 5 kΩ; R_{15}, 0,5 MΩ; B_1, 12 V; B_2, 12 V; B_3, 6 V; B_4, 120 V; B_5, 100 V; B_6, 4 V.

[1] SIRI W. — *Rev. Sc. Instr.*, 1947, **18**, 540. — GUTHERIC A. et WALKERLING R. K. — *Vacum Equipm. Techn.*, 1949, 207. — *Cf.* aussi appareil réalisé par le Commissariat à l'Énergie atomique.
[2] PHILBERT G. — *J. Physique Rad.*, **50** A, 1952, 13.
[3] VALENTIN R. — *Diplôme d'Études supérieures*, Faculté des Sciences de Nancy (en préparation).

Manuscrit reçu le 23 février 1952.

Le Gérant : MAURICE BLONDIN. 141174 IMP. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1952.